

## **ASPECTOS DE LA ECONOMÍA DE SRAFFA**

Antonio Mora Plaza

### Resumen:

Este trabajo versa sobre el libro "Producción de mercancías por medio de mercancías" de uno de los economistas más importantes y menos conocidos que han existido. Su obra entraña la mayor revolución en el campo del análisis económico y no se limita a la obra citada. "Producción de mercancías..." es el mejor y más fundamentado ataque que ha recibido la teoría neoclásica y marginalista del "capital" y la consiguiente y supuesta retribución de los factores de acuerdo con sus productividades marginales. Para la economía de Sraffa no existen bienes de "capital" que sean distintas del resto, sino mercancías –hoy diríamos bienes y servicios- que son consumidas directamente o utilizadas para producir otras mercancías. En economía lo significativo es lo que se produce y cómo se produce y no cómo se consume. A partir de su descubrimiento de la "razón-patrón", el modelo sraffiano relaciona precios, salarios y ganancias en economías con y sin producción con excedente, con "el capital" reducido a trabajo fechado, con rendimientos constantes o no, con producción conjunta o no, con capital fijo o no, con y sin desplazamientos de métodos de producción. A diferencia de la economía neoclásica y marginalista que hace supuestos optimizadores, valoraciones marginales y equilibrios únicos que determinan soluciones sin margen para la confrontación social, la economía de Sraffa no es determinística, no nos dice cuánto y a qué precios tenemos que producir, como distribuir y cuánto consumir, pero sí establece relaciones, condiciones y límites entre variables que recogen aspectos de la realidad económica.

Palabras clave: mercancía-patrón, razón-patrón, neoclásico, marginalista, capital, mercancías, trabajo fechado, Sraffa

Clasificación - JEL: B-24

### Abstract:

This work attend on the book "Production commodities by means commodities" of one of the most important economists and less known than they have existed. Its work involves the greater revolution on the economic analysis and it is not limited the mentioned work. "Production commodities by means commodities" he is the best one and more justified attack than it has received the neoclassical and marginal theory of the "capital" and the consequence and supposed payment of the factors by with his marginal productivity. For the Sraffa economics the goods of "capital" are not different from the rest, but commodities -today we would say to goods and services- that are consumed directly or used to produce other commodities. In economy the significant one is what it is produced and how it is produced and not how it is consumed. From its discovery of the *standard ratio*, the Sraffa model relates prices, wages and profits in economies with surplus or without , "the capital" as *dated work reduced*, with constant returns to scale or not, joint production or not, fixed capital or not, and without displacements of production methods. Unlike the neoclassic and marginalistic economy that make supposed optimizers, marginal valuations and unique equilibrium that determine solutions without margin for the social confrontation, the economy of Sraffa are not deterministic, do not say to us how many and with what prices we must produce, like distributing and like to consume, but it establishes relations, conditions and limits between variables that gather aspects of the economic reality.

Key words: standard commodity, standard ratio, neoclassical, capital, commodities, dated work, Sraffa

## ASPECTOS DE LA ECONOMÍA DE SRAFFA

(y extensiones a partir de su libro “Producción de mercancías por medio de mercancías”)

Antonio Mora Plaza

economista

Madrid, septiembre de 2007

### A modo de introducción

Pocos autores –y no me refiero sólo a los economistas- han conseguido en tan pocas páginas revolucionar un corpus de conocimiento como lo hace Piero Sraffa en “Producción de mercancías por medio de mercancías”. Salvando las distancias de genialidad y oportunidad, es comparable al Galileo del “Diálogo para las dos ciencias” o al Einstein de su “Electrodinámica de los cuerpos en movimientos”<sup>1</sup>. Su mérito e importancia es también comparable -aunque no su reconocimiento ni social ni de aceptación del nuevo paradigma por el gremio- al cambio de otros paradigmas, como al mencionado de Galileo con su ley de la inercia, al de Copérnico con su heliocentrismo, al Darwin de la evolución y la diversidad de las especies, al Newton de la dinámica de las fuerzas, al Freud de la teoría de la libido y del inconsciente, al Cantor con sus transfinitos, al Einstein destructor del paradigma de la simultaneidad de los movimientos, o al Picasso cambiando la historia de la pintura del siglo XX y venideros, y también, aunque ya más en el terreno de lo económico, al Adam Smith de la mercantil mano invisible, al Ricardo de los costes comparativos, al Marx de la teoría de la plusvalía o al Keynes de la demanda efectiva. Con suma modestia, casi exasperante, con apenas reconocimiento en el gremio y menos fuera de él, Sraffa declara sus intenciones en el prefacio de su libro diciendo que “la investigación se ocupa exclusivamente de aquellas propiedades de un sistema económico que no dependen de variaciones en la escala de producción o en la proporción de los factores”. E inmediatamente señala la diana sobre la que lanza la flecha de “Producción de ...”: *el marginalismo*, porque su “advenimiento” *ha sumergido* el punto de vista que acaba de anunciar en los párrafos anteriores, que es el “punto de vista de los antiguos economistas clásicos, desde Adam Smith a Ricardo” y añade: “El enfoque marginalista exige que la atención se centre en la variación, porque sin variación, bien en la escala de producción, bien en las proporciones de los factores de producción, no puede haber producto marginal ni coste marginal”. No se puede decir más con menos. El propio título del libro y su musical subtítulo –“preludio a una crítica de la Teoría Económica”- son un torpedo a la línea de flotación de la teoría... del capital y de la producción, corazón y nudo gordiano del paradigma neoclásico y marginalista. Sraffa no se pregunta -como su amiga y compañera en el Cambridge inglés Joan Robinson<sup>2</sup>- qué es el capital o cómo se agrega, sino que contesta a una pregunta que no acaba de hacer explícita en el libro, y eso hace de él algo enigmático, como una novela de misterio donde preguntas y respuestas se entrecruzan. Para los neoclásicos y marginalistas el “capital” era –y lo es para sus herederos neoliberales actuales- algo que entraba en pie de igualdad, con *el trabajo y la tierra* –una trinidad ¿laica?-, en la producción, para así *explicar, justificar y bendecir* su retribución por separado; llamándoles además factores,

---

<sup>1</sup> Más conocido con el *desgraciado* nombre de *teoría de la relatividad*.

<sup>2</sup> “Ensayos críticos”.

como si tuvieran vida propia que demandaran justicia humana –incluso divina- en el reparto de la tarta de la renta (del *producto neto*). Pero como quiera que para neoclásicos y marginalistas no era de recibo quedarse en lo meramente ideológico porque, en este terreno, es imposible distinguir la realidad del deseo, los neoclásicos y marginalistas de antaño -y los neoliberales de hogaño- han desarrollado un poderoso instrumento analítico que comienza con la mano invisible de Adam Smith -y de aquello de que *buscando cada uno el interés particular se consigue el general*- hasta las teorías del equilibrio general de Walras, Debreu, Arrow, pasando por Pigou y Pareto. Y a fe que lo han conseguido, porque los 2 teoremas de la Teoría del Bienestar nos dicen que en una economía en la que se diera –¿pero se da realmente o no?- competencia perfecta en todos los mercados para todos los bienes y servicios obtendríamos un óptimo de Pareto y viceversa, que es lo mismo que decir que estaríamos en el mejor de los mundos posibles, aunque la distribución de la renta y la riqueza fuera la más injusta imaginable. Claro está- se señala como de pasada- que existen algunos “*fallos de mercado*” que lo pueden dificultar: competencia imperfecta, monopolios, oligopolios, bienes públicos, información asimétrica, deficiente e insuficiente, existencia de efectos externos, rendimientos crecientes, indivisibilidades, sindicatos, Sector Público, etc. ¡Casi nada!. En definitiva, el mundo real, el de los 6.500 millones de seres humanos que pueblan el planeta, donde el hambre, la enfermedad, la incultura y la terrible, injusta e *inmerecida* distribución de la renta y riqueza es la moneda más común, la más compartida, mucha más que el *declinante billete verde* o el *barbilampiño* euro. Pero neoclásicos y marginalistas<sup>3</sup> han construido una teoría que, si no explica por más que lo intentan el mundo real, permite justificar unas retribuciones de los factores –tierra, capital y trabajo- por el mérito del valor de sus “*productividades marginales*” obtenidas a partir de unas “*funciones de producción*” dotadas de propiedades maravillosas, donde capital y trabajo confraternizan, se complementan, se sustituyen marginalmente, suavemente, dulcemente medidos por la angelical y omnipresente mano invisible del Sr. Smith; por una teoría *determinista*<sup>4</sup> donde los factores son retribuidos de acuerdo con sus *merecidas* y bien ganadas *productividades marginales*, fruto de comportamientos optimizadores, unas veces propios y otros ajenos a los propios factores. La mano invisible de este escocés, extraordinariamente observador, andarín y moralista, nos dice: para hacer el bien has de ser egoísta, por más que eso te repugne; no es pecado y, en todo caso, el *catecismo* de *la riqueza de las naciones* y yo mismo te absuelven. No es en sí mismo el marginalismo desechable; pienso que la idea de que los procesos de optimización basados en la valoración marginal, tanto para análisis parcial o como instrumento de política económica o social, como instrumento de planificación o de gestión, son una conquista intelectual de primera magnitud. El problema ha sido y aún es querer llevar las aguas fuera de su cauce, sustituir la realidad por el deseo. El mundo real nada tiene que ver con las construcciones axiológicas –por más deseables que nos parezcan- del equilibrio general y de los óptimos paretianos. Y por si fuera poco, ambas construcciones intelectuales son conformistas con la distribución de la renta por desigualitaria e injusta que sea.

---

<sup>3</sup> Un artículo largo sobre la vida y aspectos de la teoría de Sraffa puede verse en Internet: “La implosión de la economía neoclásica”, de Alejandro Fiorito. ([www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf](http://www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf))

<sup>4</sup> “La libre interacción de los individuos no produce el caos, sino un modelo metódico que está lógicamente determinado”, en “La Historia del Análisis Económico” de J. A. Schumpeter; la inspiración, en la teoría de los gases.

Pero sigamos con Sraffa. Su libro, "Producción de mercancías por medio de mercancías"<sup>5</sup>, da para mucho y mucho se ha escrito ya sobre él<sup>6</sup>. Vamos a explicar y desarrollar modestamente algunos temas por si pudieran interesar. Comienza Sraffa con un sueño que persiguieron los clásicos, especialmente A. Smith, D. Ricardo y C. Marx: conseguir medir las variaciones reales de la economía, eliminar la influencia de los precios para así poder valorar su evolución y hacer comparaciones. No lo consiguieron. Vamos a ver como lo resuelve Sraffa, pero no hay que despistarse, porque, aún cuando su solución es lo que más aparece en los libros de la historia del análisis del pensamiento económico, no es este el objetivo del libro de Sraffa: sólo es su *preludio*. Su objetivo es esa cosa llamada "*capital*" y lo que de él se deriva: la función de producción neoclásica, la supuesta retribución de los *factores* de acuerdo con sus *productividades marginales* y, por ende, la distribución de la renta marginalista. La sociedad, las clases sociales, la confrontación social y, menos aún, la lucha de clases marxiana, no aparecen en el libro. Sin embargo la formación de los precios y el reparto de la tarta de la renta (el producto neto) que se deduce del libro, a diferencia de la concepción neoclásica marginalista, no es determinista, aunque tampoco arbitraria. Si la realidad económica –y por tanto social- se puede resumir, abstraer, en unas pocas variables económicas, Sraffa nos dice que tenemos más de un grado de libertad, que podemos operar sobre una o varias de estas variables, pero entonces dejan de tener libertad las otras. Para Sraffa la economía no son procesos de optimización de comportamientos individuales –o al menos no son significativos- donde todo queda determinado; estamos ante una libertad condicionada: nuestros comportamientos económicos que afectan a la renta, al reparto de la renta (salarios y ganancias), a la productividad, a la formación de los precios, a la producción, al consumo, son libres, pero sus consecuencias acotan y agotan los efectos sobre las realidades que recogen el resto de las variables. Empezamos.

---

<sup>5</sup> Es este un trabajo centrado en este libro, por lo que se renuncia a un juicio global sobre todos los escritos de Sraffa, en especial sus artículos de los años 20 "On the relations between cost and quantity produced" y "The laws returns under competitive conditions". Ambos son importantes por sí mismos, para una valoración global del lugar que ocupa el italiano en la historia del análisis económico, y para los historiadores en aras de valorar la influencia de Sraffa en la controversia de los "Cambridge" sobre "el capital" y en el surgimiento de las teorías de la competencia imperfecta/monopolística de Robinson y Chamberlin.

<sup>6</sup> Garegnani, Spaventa, Hicks, Brown, Morishima, Dobb, Harcourt, Meek, Rocanglia, Quandt, Steedman, Vegara, Newman, Harrod, Dobb, Burmeister, Fiorito, Samuelson, Pasinetti, Monza, etc.

## 1. La mercancía patrón<sup>7</sup>

Ya hemos visto el interés de Sraffa en encontrar una unidad de medida que pudiera valorar el estado de la economía, sus variaciones, independientemente de los precios. El lo cuenta en el capítulo IV del libro con la sencillez y precisión que le caracterizan: "La necesidad de tener que expresar el precio de una mercancía en términos de otra que es elegida arbitrariamente como patrón complica el estudio de los movimientos de precios que acompañan a una variación en la distribución. Resulta imposible decir, ante cualquier fluctuación particular de precios, si surge como consecuencia de las peculiaridades de la mercancía que está siendo medida o si surge de las peculiaridades de la mercancía adoptada como patrón de medida"<sup>8</sup>. David Ricardo –entre otros- ya había planteado el problema en su "Principios... " cuando dice: "Cuando los bienes varían en su valor relativo, sería deseable averiguar con certeza cuáles de ellos bajaron y cuáles aumentaron en su valor real, y ello sólo podría lograrse comparándolos sucesivamente con cierta medida estándar invariable de valor, que no debe estar sujeta a ninguna de las fluctuaciones a las cuales están expuestos los demás bienes"<sup>9</sup>. Pues bien, Sraffa soluciona el problema de esta unidad de medida que fuera inmune a la variación de los precios componiendo una mercancía –o como dice él, "una fracción de la industria"- tal que en todos los sectores (o industrias), lo que aporte cada sector (o industria) al producto final esté en la misma proporción que lo que entra como medio de producción. Ello tiene la enorme ventaja de que esta inmunidad a los precios del producto final respecto a los medios no sólo afecta a la producción final de un sector, sino también a los medios de producción con que son producidos a su vez los medios directos, los más inmediatos. Y así se puede trasladar atrás en el tiempo, de tal manera que tengamos la confianza de que los productos finales de un período se van a convertir en medios de producción del siguiente, sin que por ello cambien sus proporciones, y con ello nos aseguramos de no dejar afectados la valoración final del producto cuando introduzcamos los precios. Sea " $x_{ij}$ " la cantidad de la mercancía " $i$ " que entra en la producción del sector " $j$ " e " $y_i$ " el producto final del sector

" $i$ ". En una economía *productiva*<sup>10</sup> ha de ocurrir que " $y_i \geq \sum_{j=1}^n x_{ij}$ " para todo

" $i$ " y mayor para al menos un " $i$ ". Si tomamos la producción tal cual en un momento determinado en un país cualquiera, es evidente que, aunque se cumpla la relación anterior para todos los sectores (las " $i$ "), la relación entre

producto final " $y_i$ " y medios " $\sum_{j=1}^n x_{ij}$ " será igual para 2 sectores sólo por

pura casualidad. Pues bien, lo que hace Sraffa es tomar una cantidad de

---

<sup>7</sup> "standard commodity".

<sup>8</sup> Pág. 37 de "Producción de ... "

<sup>9</sup> "Principios de Economía Política y Tributación", cáp. I, sección VI, de D. Ricardo.

<sup>10</sup> Para una discusión sobre las condiciones necesarias y suficientes de la productividad de una economía véase "Economía Política y modelos multisectoriales", de Josep M<sup>a</sup> Vegara, 1979, págs. 21 y siguientes, edit. Tecnos.



continuación. Para el economista italiano la economía podía sintetizarse<sup>13</sup> al modo ricardiano en la siguiente ecuación:

$$(1.5) \quad p_j y_j = w l_j + (1+r) \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \quad \text{desde } j=1 \text{ a } j=n$$

donde "w" el tipo de salario, "l<sub>j</sub>" son los valores de trabajo directo (Sraffa los llama en la traducción española "cantidades anuales de trabajo empleadas") y "r" es el tipo de beneficio (igual para todos los sectores), "p<sub>i</sub>" el precio de la mercancía del sector "i" y "x<sub>ij</sub>" el producto del sector "i" consumido en el sector "j". Si esta ecuación la particularizamos para el caso en el que el tipo de salario valga cero queda:

$$(1.6) \quad p_j y_j = (1+R) \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \quad \text{desde } j=1 \text{ a } j=n$$

y si además la unimos fraternamente con la (1.1):

$$(1.1) \quad \mu y_i q_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} q_j \quad \text{desde } i=1 \text{ a } i=n$$

y multiplicamos la (1.6) por los "multiplicadores" "q<sub>j</sub>" antes calculados, a la vez que multiplicamos la (1.1) por los precios "p<sub>j</sub>", obtenemos 2 ecuaciones con dos incógnitas:

$$(1.7) \quad \sum_{j=1}^n p_j y_j q_j = (1+R) \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \sum_{j=1}^n q_j$$

$$(1.8) \quad \mu \sum_{i=1}^n p_i y_i q_i = \sum_{i=1}^n p_i \sum_{j=1}^n x_{ij} q_j$$

y resolviendo se obtiene la expresión:

$$(1.9) \quad \mu = \frac{1}{1+R}$$

A "R" le llamará Sraffa la *razón-patrón* y jugará un papel decisivo en ese ataque solapado que prepara a la teoría del capital y que veremos en los siguientes epígrafes; en cambio, la *mercancía-patrón* quedará como una especie de homenaje del economista italiano a David Ricardo, como un problema no resuelto por el economista inglés, al que tanto admiraba.

---

<sup>13</sup> Al menos para la crítica que iba a llevar a cabo a la teoría neoclásica (y marginalista) del capital y, por ende, a la teoría de la formación de los precios y de la distribución comúnmente aceptada.

## 2. Salarios, beneficios y... razón-patrón: se desvela el misterio

Con la mercancía-patrón<sup>14</sup> de los primeros capítulos del libro pareciera que Sraffa estuviera sólo interesado en resolver el problema histórico ricardiano de encontrar una vara de medir inane a la variación de los precios<sup>15</sup>. Nada de eso, porque ésta –la mercancía-patrón– es sólo una pieza menor, una especie de “Mc-Guffin” cinematográfico con el que nos ha distraído. Sraffa se lanza ahora a por una pieza mayor: la teoría clásica del capital, según la cual, existe una cosa llamada “capital”<sup>16</sup> que tiene el mismo derecho a ser retribuida que el trabajo o la tierra –la santa trinidad del Adam Smith moralista–, porque contribuye en pie de igualdad y por sí mismo al producto neto. No importa que no sepamos exactamente qué es; sabemos que es el conjunto de los medios de producción que utiliza el trabajador<sup>17</sup>; que son medios ya producidos o manipulados anteriormente; y no importa – y este es el verdadero problema– que no sepamos cómo agregar o sumar las vagonetas de una mina, las prótesis dentales de un actor, los servicios de asesoría de una empresa vitivinícola o la cosechadora de un esforzado campesino que trabaja por cuenta propia. Todos son medios de producción, aunque en algunos casos –las prótesis dentales– serían también un bien de consumo si el objetivo fuera mejorar la masticación de un empleado de correos; y no importa que, según la economía neoclásica (reforzada con los marginalistas), se nos especifique además que la retribución del capital en forma de interés (beneficio o ganancia) se hace –o debiera hacerse– de acuerdo con esa cosa llamada “productividad marginal”, que podemos incluso calcularla, porque tenemos una milagrosa función que relaciona el producto final y sus factores llena de propiedades angelicales: es “continua, dos veces derivable y estrictamente cóncava”<sup>18</sup> y se suele presentar como crecientemente decreciente (rendimientos decrecientes, con un punto de inflexión y con un máximo<sup>19</sup>).

Sraffa inicia su *preludio a una crítica a la teoría económica*<sup>20</sup> con una ecuación que va a recoger lo fundamental de su esquema de pensamiento:

---

<sup>14</sup> Y el “sistema patrón”, tal como lo llama Sraffa en versión castellana de Luis Angel Rojo.

<sup>15</sup> No es una impresión mía, porque el propio Sraffa lo dice: “El sistema patrón es una construcción puramente auxiliar. Debería ser, por tanto, posible presentar los elementos esenciales del mecanismo que estamos considerando sin recurrir a él” (en “Producción de...”, pág. 53)

<sup>16</sup> “El capital es aquella parte de la riqueza de una nación que se emplea en la producción, y comprende los alimentos, vestidos, herramientas, materias primas, maquinaria, etc., necesario para dar efectividad al trabajo”, David Ricardo en “Principios de Economía Política y Tributación”, pág. 72, edición del F.E.C.

<sup>17</sup> “El ambiente de trabajo” que dice Joan Robinson en sus “Ensayos críticos”.

<sup>18</sup> “Análisis microeconómico”, de Julio Segura, en Alianza Editorial Textos, pág. 88. Otros textos son el de Microeconomía (*Introduction microeconomics*) de Saul Estrin y David Laidler y el de *Microeconomic Theory*, de Thomas J. Sargent.

<sup>19</sup> “Todas las máquinas son maleables: son simplemente una tonelada de acero”, según J. E. Meade, en “A neo Classical Theory of Economic Growth” (recogido del libro de Maurice Dobb “Teoría del valor y la distribución desde Adam Smith, pág. 272, edit. Siglo veintiuno editores).

<sup>20</sup> Para ser exactos, no es este el primer conjunto de ecuaciones con que comienza su libro, sino con el de “Producción de subsistencia”. Allí se cumple que “ $pY=pX$ ”, sin que los salarios, el trabajo y las ganancias aparezcan explícitamente; cada sector produce lo que consume. Es una introducción *aparentemente* inocente. El sistema de ecuaciones (2.1) no aparecen hasta el capítulo II (“Producción con un excedente”), epígrafe 11.

$$(2.1) \quad p_j y_j = w l_j + (1+r) \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \quad \text{desde } j=1 \text{ a } j=n$$

En este trabajo hemos huido en lo posible de los coeficientes técnicos que son habituales en otros porque Sraffa no suponía rendimientos constantes, aunque no entraba en su discusión. Veámoslo con las propias e irónicas palabras del autor: "La tentación de presuponer rendimientos constantes no es enteramente caprichosa. El propio autor la experimentó<sup>21</sup> cuando comenzó estos estudios hace muchos años y le condujo, en 1925, al intento de argumentar que sólo en el caso de los rendimientos constantes era generalmente coherente con las premisas de la teoría económica".

El segundo sistema de ecuaciones surge de hacer el salario cero en la anterior y queda:

$$(2.2) \quad p_j y_j = (1 + R) \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \quad \text{desde } j=1 \text{ a } j=n$$

Ecuación que ya hemos visto en el epígrafe anterior, en el que "R" es la *razón-patrón*. Llegado a este punto habría que preguntarse qué pretendía Sraffa hacer con este sistema de "2n" ecuaciones con "n+3" incógnitas. Cualquiera otro se hubiera quedado contemplándolas sin más y hubiera abandonado. Y si además tuviera mentalidad matemática, sería peor. La mayoría de los economistas se enfrascaban (y se enfrascan cuando juegan con los modelos de equilibrio general) en contar y recontar las variables y el número de ecuaciones para normalizar el sistema, haciendo un precio igual a 1, que es como dividir todos los precios entre uno cualquiera. Si además el economista es un neoclásico atiborrado de farmacopea marginalista, buscará desesperadamente que haya tantas ecuaciones como incógnitas, incluidos los salarios y beneficios entre éstas, para que el sistema tenga una solución determinada objetivamente, sin margen –o al menos sin justificación- para la negociación por el reparto de la renta nacional y, menos aún, para la *lucha de clases marxiana*. Pero Sraffa permaneció imperturbable<sup>22</sup>. Ahora, en lugar de hablar de sistemas de ecuaciones normalizados con un precio arbitrario que tomamos como numerario, aplicamos un principio matemático para sistemas de ecuaciones que queremos reducir a su mínima expresión: *en un sistema de ecuaciones original que sean linealmente independiente en las incógnitas (o variables) y del que eliminamos ecuaciones e incógnitas hasta dejarlo reducido al mínimo posible -que llamamos reducido-, los grados de libertad permanecen iguales tanto en el sistema original como en el reducido, siendo los grados de libertad la diferencia entre el número de incógnitas (o de variables) y el de ecuaciones*. Aparentemente, y aplicado este criterio al sistema anterior, la cosa deviene en un desastre, porque parecería para comenzar que tenemos más ecuaciones que incógnitas. No hay tal, porque el sistema de ecuaciones de (2.2) es, por construcción, una combinación lineal del sistema (2.1)<sup>23</sup>. Recapitemos entonces: tenemos "2n" ecuaciones linealmente independientes de (2.1) y "n+3" incógnitas ("n"

<sup>21</sup> Al igual que su compatriota, San Antonio de Padua, tuvo las suyas, pero las aguantó.

<sup>22</sup> También cayó en las redes del recuento haciendo que un precio valiera uno. Leyendo "Producción de..." da la impresión de que los conocimientos matemáticos de Sraffa eran muy limitados, aunque los compensara con un instinto de economista fuera de serie. Frank P. Ramsey y Abram S. Besicovitch fueron 2 matemáticos que le ayudaron.

<sup>23</sup> Lo demostraremos en el anexo I.

precios, " $\mathbf{R}$ ", " $\mathbf{w}$ ", " $\mathbf{r}$ ")<sup>24</sup>. Pero Sraffa tenía la extraordinaria pretensión de dejar solas a " $\mathbf{R}$ ", " $\mathbf{w}$ ", " $\mathbf{r}$ " y relacionarlas mediante una ecuación, lo que le daba 2 grados de libertad en lugar de los 3 que tenía (" $\mathbf{n}+3$ " incógnitas menos " $\mathbf{n}$ " ecuaciones linealmente independientes). ¿Qué hizo?: buscar una ecuación más que no añadiera ninguna incógnita (o variable) nueva y que, simultáneamente, normalizara el sistema. Ambas cosas le permitirían eliminar el grado de libertad que le sobraba. Y lo hizo: dio el valor de " $\mathbf{1}$ " al producto neto o "*renta nacional patrón*" (hoy diríamos el PIB) haciendo:

$$(2.3) \quad \sum_{j=1}^n p_j y_j - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} = 1$$

Un matemático se habría sentido satisfecho porque tenía ahora tantas incógnitas (o variables) como ecuaciones más 2 (incógnitas). Pero ahora su lóbulo matemático dejó paso a su lóbulo económico y se preguntó: ¿cómo voy a dar el valor " $\mathbf{1}$ " al producto neto y voy a dejar al factor trabajo (los " $\mathbf{l}_j$ ") que mantengan los valores originales?: imposible. Esto le llevó a una cuarta ecuación tal como:

$$(2.4) \quad \sum_1^n l_j = 1$$

¿Satisfecho? Quizá desde el punto de vista económico sí, pero no desde el lóbulo matemático. Si ahora recontamos las ecuaciones linealmente independientes, tenemos " $\mathbf{2n}+2$ " [(las " $\mathbf{n}$ " de (2.1) + (2.3) + (2.4)] y las " $\mathbf{2n}+3$ " incógnitas anteriores, por lo que pareciera que nos hemos pasado y que tenemos ahora sólo  $\mathbf{1}$  grado de libertad en lugar de los  $\mathbf{2}$  que necesitamos. No hay tal, porque en la (2.4) no aparecen incógnitas (variables), dado que los valores trabajo (los " $\mathbf{l}_j$ ") son datos y la ecuación no cuenta para este sobresaltado recuento de los grados de libertad. ¡Eureka, lo tenemos!:

*Grados de libertad = " $\mathbf{n}+3$ " variables [los " $\mathbf{n}$ " precios,  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{r}$ ] menos " $\mathbf{n}+1$ " ecuaciones en las incógnitas linealmente independientes [la (2.1) y la (2.4)].*

Veamos ahora el sistema de ecuaciones en términos matriciales:

$$(2.5) \quad pY = wL + (1 + r)pX$$

$$(2.6) \quad pY = (1 + R)pX$$

$$(2.7) \quad LI = 1$$

$$(2.8) \quad pYI - pXI = 1$$

Doy el desarrollo matricial del primer y último sistema de ecuaciones para satisfacción de mentes matemáticas (que las hay):

<sup>24</sup> Los " $\mathbf{n}$ "  $\mathbf{Y}$ , los " $\mathbf{n}$ "  $\mathbf{L}$  y los " $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ "  $\mathbf{x}_{ij}$  son datos y no cuentan en este recuento de grados de libertad.

$$[p_1 \ \cdots \ p_n] \times \begin{bmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{bmatrix} = w [l_1 \ \cdots \ l_n] + (1+r) \times [p_1 \ \cdots \ p_n] \times \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[p_1 \ \cdots \ p_n] \times \begin{bmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - [p_1 \ \cdots \ p_n] \times \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Pues bien, si resolvemos ahora el sistema de “**n+1**” ecuaciones linealmente independientes en las incógnitas (o variables) con “**n+3**” incógnitas (o variables) obtenemos la pieza mayor que andaba buscando Sraffa:

$$(2.9) \quad r = (1-w)R \quad \text{o bien:} \quad w = \frac{R-r}{R}$$

*idonde los salarios y beneficios se relacionan a través de la razón-patrón sin mediar los precios! Tan importante en esta fórmula es lo que aparece como lo que se ausenta: ivemos a los beneficios sin que aparezca su compañero de baile neoclásico-marginalista: esa cosa llamada “capital”! Hay que observar que Sraffa no hace más supuestos restrictivos, ni vuela por esferas de abstracción más altas que lo que lo hacían (y lo hacen aún) neoclásicos y/o marginalistas. ¿Cómo se reparte ahora la renta nacional o producto neto “**r+w**”? Para el esquema de pensamiento sraffiano la economía ahí no tiene nada que decir y dependerá de la capacidad de negociación, según unos, de las correlaciones de fuerzas según otros o, directamente, de la lucha de clases (Marx), pero siempre dentro de los límites de (2.9): salarios y beneficios están en relación inversa, pero lo están además bajo una relación de dependencia de la *razón-patrón* “**R**”; razón-patrón que es una medida de la productividad del sistema<sup>25</sup> y una medida del excedente (en términos de medios de producción). Esto es lo que nos dice Piero Sraffa, y se lo dice a sus coetáneos y contemporáneos del gremio y fuera del gremio.*

No necesariamente los modelos sraffianos han de ser incompatibles con variables susceptibles de ser optimizadas y, por tanto, con el análisis marginal, pero sería contrario al espíritu del autor y del modelo construir sistemas de ecuaciones y variables que determinaran salarios y beneficios internamente y de forma única. Por *un principio de realidad*, Sraffa trabaja con algún grado de libertad, porque todo el libro de “*Producción de mercancías por medio de mercancías*”, no sólo es un ataque –que lo es– a la

<sup>25</sup> Al definirse la “razón-patrón” como el cociente entre el producto neto y los medios de producción empleados, a mayor “razón-patrón”, mayor es la tarta a repartir. A diferencia de los neoclásicos-marginalistas, Sraffa no entra en si el salario depende justamente o no de la productividad del trabajo y si ocurre lo mismo con las ganancias y esa cosa llamada “capital”; y, a diferencia de los marxistas, no entra si el reparto depende del grado de explotación: coloca el toro de la ecuación (2.9) y que cada uno lo toree como buenamente pueda, bien sea mediante la negociación, bien sea mediante la lucha de clases. El sistema económico, la economía, impone límites, pero no imparte justicia.

función de producción neoclásica, sino que elude conscientemente la determinación de las variables que afectan al reparto de la renta mediante funciones, productividades u optimizaciones, y construye un sistema donde lo social juega un papel decisivo, aunque el autor no lo haga explícito. Es un modelo (o modelos) más abierto a lo social que los propios modelos marxianos, donde se trabaja con composiciones orgánicas de capital fijas y tasas de explotación inevitables. A pesar de que para el alemán *el motor de la historia fuera la lucha de clases*, como modelo estrictamente económico, es más revolucionario el del italiano.

### 3. Esquema neoricardiano

Llegados hasta aquí, abandonamos la grata compañía del economista italiano -al igual que el Dante con Virgilio en la Divina Comedia- y, sin olvidar sus enseñanzas, planteamos ahora un sistema de ecuaciones similar al anterior, con la única diferencia de que los beneficios se calculan sobre todos los costes, incluidos los salarios. Es quizá el esquema que más se correspondería con un modelo que intentara reflejar -con los grados de abstracción que se quiera- el funcionamiento real del sistema capitalista. El propio Sraffa parte de él en el capítulo I de su libro y lo justifica diciendo "hemos considerado los salarios como consistentes en los bienes necesarios para la subsistencia de los trabajadores, de modo que entraban en el sistema en pie de igualdad con el petróleo para las máquinas o los alimentos para el ganado". Pero Sraffa inmediatamente cambió al modelo que ya hemos visto porque consideraba que "el salario se paga *post factum* como una participación del producto anual, abandonándose así la idea de los economistas clásicos de un salario avanzado desde el capital". No he logrado encontrar razones que justifiquen una preferencia por un esquema u otro, porque las conclusiones que se extraen son las mismas, aunque con variaciones formales. Este nuevo esquema se caracterizaría por este conjunto de "2n+2" ecuaciones:

$$(3.1) \quad pY = (1 + \pi)[wL + pX]$$

$$(3.2) \quad pY = (1 + R)pX$$

$$(3.3) \quad LI = 1$$

$$(3.4) \quad pYI - pXI = 1$$

Ahora ya nos ahorramos la discusión sobre los grados de libertad, puesto que el número de ecuaciones y el número de incógnitas son los mismos que los vistos en el epígrafe "2". Aquí al beneficio le hemos llamado " $\pi$ ", en lugar de " $r$ ". Pues bien, de este conjunto de ecuaciones salen las relaciones:

$$(3.5) \quad \pi = \frac{(1-w)R}{1+wR} \quad \text{o bien} \quad w = \frac{R-\pi}{(1+\pi)R}$$

donde tanto el tipo de beneficio como el tipo de salarios son menores que en el modelo sraffiano<sup>26</sup>

---

<sup>26</sup> ¿Cómo es posible que ocurra simultáneamente ambas cosas? Lo dejo como reflexión. Una pista: ver, desarrollar y comparar las ecuaciones (2.8) y (3.4).

#### 4. Esquema marxiano

Ahora hemos añadido al esquema ricardiano una ecuación que define la teoría de la explotación marxista. Para Marx, en efecto, la plusvalía –y por ende las ganancias (las utilidades ricardianas)- se generan por la diferencia entre el valor final que aporta el trabajo humano (con su mente y sus manos), y el valor incorporado a los bienes que consume para reproducirse como individuo y como clase social. El esquema de pensamiento marxiano en términos formales viene caracterizado por el sistema de “**n-1**” ecuaciones linealmente independientes<sup>27</sup>:

$$(4.1) \quad e = e_1 = \dots = e_n = \frac{\eta[w l_j + \sum_{i=1}^n p_i x_{ij}]}{w l_j} \quad \text{para todo } j=1 \text{ a } j=n$$

siendo “ $e_j$ ” la tasa de explotación que, en términos de valor, es el cociente entre la plusvalía y el capital variable. A esta ecuación, y sin más dilación, le añadimos las ecuaciones matriciales del sistema neoricardiano anterior:

$$(4.1) \quad ewL = \eta[wL + pX]$$

$$(4.2) \quad pY = (1 + \eta)[wL + pX]$$

$$(4.3) \quad pY = (1 + R)pX$$

$$(4.4) \quad LI = 1$$

$$(4.5) \quad pYI - pXI = 1$$

y hacemos el ejercicio de siempre: contar número de ecuaciones linealmente independientes en las incógnitas (o variables) y número de incógnitas (o variables). Veamos: tenemos “**n**” precios + “**n**” valores de trabajo directo “ $l_j$ ”<sup>28</sup> +  $e + \eta + w + R = \mathbf{2n+4}$  variables. Número de ecuaciones: **n-1** de (4.1) + **n** de (4.2) + la (4.4) + la (4.5) = **2n+1**. Conclusión: hay **3** grados de libertad [ **2n+4** variables – **2n+1** ecuaciones], lo que nos da la posibilidad de establecer *una* ecuación que relacione las **4** variables que nos interesa (**4-1=3** g.de l.). El resultado en efecto es:

$$(4.6) \quad \eta = \frac{ewR}{1 + (1 - ew)R} \quad \text{o que} \quad w = \frac{1}{e} \times \frac{\eta}{1 + \eta} \times \frac{1 + R}{R}$$

donde se cumple al menos la condición necesaria del teorema fundamental marxiano<sup>29</sup>: “es condición necesaria y suficiente para que exista un tipo de ganancia positiva que exista un grado de explotación positiva”. En efecto,

<sup>27</sup> Dejo al lector el ejercicio de pensar porqué tenemos en (4.1) “**n-1**” ecuaciones linealmente independientes en lugar de “**n**”.

<sup>28</sup> Ahora sí entran los valores de trabajo directo porque son variables.

<sup>29</sup> Ver “La teoría económica de Marx” (*Marx’s Economics*), de Michio Morishima, pág. 15, edit. Tecnos. Fue N. Okhisio el primero en demostrarlo en “*A mathematical note on marxian theorems*”, según nos relata Morhisima.

para que  $\eta > 0$  ha de ocurrir que  $e > 0$ ; también desde luego que la tasa salarial " $w$ " y la razón-patrón " $R$ " lo sean. Pero además, en este sistema ha de ser mayor que cero el denominador, es decir:

$$(4.7) \quad 1 + (1 - ew)R > 0$$

lo que nos da que para que la tasa de ganancia sea positiva, el tipo de salario debe ser menor en todo caso que:

$$(4.8) \quad 0 < w < \frac{1}{e} \times \frac{1 + R}{R}$$

En resumen: para que exista un tipo de ganancias positiva, el tipo de salario no puede sobrepasar la expresión recogida en (4.8). La fórmula recoge 2 factores: uno afecta a la razón-patrón del sistema y otro a la inversa del grado de explotación marxiano (a mayor explotación menor salario). Dos conclusiones: a) la primera, a modo de corolario, sería la de que la fórmula (4.8) reflejaría el modo de pensar sraffiano: la economía, a diferencia de la visión neoclásica marginalista, no es determinista, no dice cuál ha de ser el nivel de salarios en este modelo estacionario<sup>30</sup>, pero sí impone un límite si los beneficios han de ser positivos; b) que los salarios han de ser positivos para que los beneficios (o ganancias) lo sean y aparezcan explícitamente en (4.8), se debe a la inclusión de la tasa de explotación marxiana, que es ajena al modelo de "Producción de..." de Sraffa. Y sin embargo tiene una lógica impecable bajo la óptica del economista y revolucionario alemán: si la plusvalía se origina por una diferencia en términos de *valor-trabajo* entre el valor de la producción y el valor de las mercancías (hoy bienes y servicios) que consume el trabajador, sólo si este último este último valor, reflejado en salarios, es positivo puede aquélla (la plusvalía), reflejada en ganancias, ser positiva.

Este modelo puede ser generalizable si, en lugar de un solo *tipo de salario*, tenemos un salario por sector (o mercancía) de tal forma que:

$$(4.9) \quad w = [w_1 \quad \cdots \quad w_n]$$

y si el vector de *requerimientos de trabajo* " $L$ " pasa a ser una matriz " $n \times n$ " del tipo:

$$(4.10) \quad L = \begin{bmatrix} l_1 & & \\ & \ddots & \\ & & l_n \end{bmatrix}$$

---

<sup>30</sup> El tiempo no figura ni como variable, ni tampoco aparece como diferenciador de variables (subíndices). La cosa cambiará cuando introduzcamos el trabajo fechado como reductor (capitalizador) de esa cosa llamada "capital".

Si además ahora hacemos que " $wLI=1$ " -y no sólo " $LI=1$ "-, tenemos un sistema de " $3n+1$ " ecuaciones con " $3n+3$ " incógnitas. Tras el proceso de sustituciones habitual nos da:

$$(4.11) \quad \eta = \frac{eR}{1 + (1-e)R}$$

En (4.11) se vuelve a cumplir el teorema fundamental marxiano de que, *para que exista una tasa de beneficio positiva ha de haber una tasa de explotación también positiva*. También se da el hecho notable de que cuando la tasa de explotación tiende a " $1$ ", la tasa de beneficios tiende a la razón-patrón " $R$ ". Dicho de otra manera: *en el modelo marxiano con razón-patrón sraffiana y con salarios distintos según sectores (o mercancías), si la plusvalía se hace tan grande como el capital variable, los beneficios acaparan toda el excedente sraffiano (la razón-patrón)*. Como todo modelo es discutible, pero al menos la conclusión no es trivial.

$$(4.12) \quad \text{si } e \rightarrow 1 \Rightarrow \eta \rightarrow R$$

## 5. Esquema marxista, la razón patrón y... una sorpresa

Abandonamos ahora la noble guía *sraffiana* para adentrarnos en la volcánica *marxista*. En efecto, vamos a mezclar ahora precios y cantidades con los valores-trabajo de Marx. Para este economista, la *unidad de medida* de todo lo que produce el hombre (y la mujer, claro) es *el tiempo de trabajo necesario para realizarlo*. Los precios existen porque existe el mercado donde se intercambian o se pagan los bienes y servicios (mercancías, *commodities*). Todo se valora en horas de trabajo: los medios de producción que acompañan al trabajador (capital constante), los bienes que consume este para su subsistencia, la de su familia y su reproducción como clase social (capital variable), y la diferencia entre el valor que aporta el trabajador y su consumo (plusvalía). Otra discusión es si esta vara de medir es o no operativa, si es más o menos significativa que la de los precios y cual es su papel en la historia del pensamiento económico<sup>31</sup>. Pero esta es otra historia. En el esquema de pensamiento marxista y, en concreto, la formación de los valores en la producción de mercancías (hoy diríamos bienes y servicios) vendría expresado por esta fórmula:

$$(5.1) \quad \Lambda Y = S + V + C$$

donde " $\Lambda Y$ " sería el valor trabajo del producto final de cada mercancía, que lo hemos diseccionado como el producto del valor-trabajo unitario " $\Lambda$ " por la cantidad de mercancías producidas " $Y$ ", " $S$ " sería la plusvalía generada, " $V$ " el capital variable que representa el valor de los bienes de consumo del trabajador para la subsistencia de él y su familia, y " $C$ " el capital constante o, como diría J. Robinson, *el ambiente (los medios de producción) que acompaña al trabajador*. En términos matriciales sería:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 & & \\ & \ddots & \\ & & v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{bmatrix}$$

La segunda ecuación ya ha sido visto anteriormente, pero bajo el tamiz *sraffiano* o *ricardiano*: la tasa de explotación. Piedra angular de la creación del sistema marxista, sin precedentes en la historia de la economía, porque de ella se hace depender tanto el valor de lo que se produce como la plusvalía, que en el sistema capitalista se extrae del trabajador –según Marx– en contra de su voluntad merced a las condiciones de producción del modo de producción capitalista, basado en la división del trabajo y el capital.

$$(5.2) \quad \mathcal{E}_j = s_j / v_j \quad \text{para todo } j=1 \text{ a } j=n$$

Si suponemos que todos los sectores (o mercancías) tienen (o padecen) la misma tasa de explotación, entonces ocurre que:

---

<sup>31</sup> Por ejemplo, la historia del llamado "problema de transformación de valores a precios".

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 = \dots = \mathcal{E}_n$$

lo que nos da un conjunto de "n-1" ecuaciones linealmente independientes (lo adelanto para el recuento).

La tercera característica que acompaña al esquema marxista, junto a los valores trabajo y la teoría de la explotación, es su consideración de *la composición orgánica de capital* como cociente entre el capital constante y el capital variable; para ricardianos, marginalistas, clásicos y sus "neos" correspondientes, serían los coeficientes "capital/trabajo". Creo que Marx se complicó mucho con esto, intentando diferenciarse de sus predecesores, por un lado y, por otro, buscando demostrar que el capitalismo era inviable, porque las ganancias iban en dirección contraria –para ser exactos, inversa- al ineludible aumento de la composición orgánica de capital. Cada lector puede tener un juicio sobre el tema, sobre si esa profecía se ha cumplido, se está cumpliendo o si se cumplirá. Salto sobre ello y doy la ecuación:

$$(5.3) \quad \theta_j = c_j / v_j \quad \text{para todo } j=1 \text{ a } j=n$$

Seguimos a Marx y hacemos el supuesto –más que discutible- de que las composiciones orgánicas de capital sean iguales en todos los sectores, de tal manera que:

$$\theta = \theta_1 = \dots = \theta_n$$

que nos da también "n-1" ecuaciones linealmente independientes. En términos matriciales ambos sistema de ecuaciones serían:

$$\begin{bmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{bmatrix} = \mathcal{E} \times \begin{bmatrix} v_1 & & \\ & \ddots & \\ & & v_n \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{bmatrix} = \theta \times \begin{bmatrix} v_1 & & \\ & \ddots & \\ & & v_n \end{bmatrix}$$

junto con los vectores de precios "p", multiplicadores "q" y de "unos"

$$p = [p_1 \quad \dots \quad p_n] ; \quad q = [q_1 \quad \dots \quad q_n] ; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1_1 \\ \vdots \\ 1_n \end{bmatrix}$$

Ahora añadimos las consabidas ecuaciones de Sraffa sobre la *razón-patrón* y la de la normalización del sistema, haciendo que el producto neto sea igual a "1", al que añadimos 2 ecuaciones más que ahora explicamos:

$$(5.1) \quad \Lambda Y = S + V + C$$

$$(5.2) \quad S = \mathcal{E}V$$

$$(5.3) \quad C = \theta V$$

$$(5.4) \quad pY = (1 + R)pX$$

$$(5.5) \quad zVI = 1$$

$$(5.6) \quad pYI - pXI = 1$$

$$(5.7) \quad z\Lambda YI = pYI$$

Ya se han comentado las ecuaciones (5.1), (5.2) y (5.3), por un lado, y, por otro, las ecuaciones (5.4) y (5.6) son las mismas que las discutidas en los modelos sraffiano, neoricardiano y marxiano; sin embargo aparecen 2 nuevas ecuaciones de normalización: la (5.5) y la (5.7). La primera, "zVI = 1", es equivalente a la ecuación de normalización del trabajo de los modelos anteriores, solo que en este caso se trata del capital variable. La (5.7) es típica del criterio de Marx según el cual: a) los valores globales de la producción medidos en término de valor-trabajo (horas de trabajo) debían ser equivalentes al mismo concepto medido en término de precios; b) es el mercado y las diferentes composiciones orgánicas del capital entre los diversos sectores el que provocaría las divergencias sectoriales entre una y otra forma de medir<sup>32</sup>.

Los multiplicadores "z<sub>j</sub>", por su parte, serían los responsables de convertir horas de trabajo en precio (o al revés, según gustos). Ahora, inspirados por el saber hacer de Sraffa -aunque abandonados a nuestra suerte-, el lector habrá adivinado que pretendemos nada más y nada menos que relacionar "R, ε, θ", y para ello deberíamos ser capaces de construir un sistema reducido de una ecuación con 2 grados de libertad (3 variables y una ecuación). ¿Lo hemos conseguido? Veamos.

ecuaciones		variables		datos	
de (5.1)	n	Λ	n	<b>Y</b>	n
de (5.2)	n-1	S	n	<b>X</b>	n
de (5.3)	n-1	V	n	<b>p</b>	n
de (5.4)	n	C	n	<b>z</b>	n
(5.5)	1	ε	1		
(5.6)	1	θ	1		
(5.7)	1	R	1		
total	<b>4n+1</b>	total	<b>4n+3</b>		

¡Conseguido! Tenemos 2 grados de libertad [**4n+3 - 4n+1**]. Ahora los precios "p<sub>i</sub>" no juegan ningún papel, puesto que sólo entran en las ecuaciones de normalización como datos; lo mismo para los *multiplicadores* "z<sub>j</sub>", y del resultado de pre y pos multiplicar por precios y *multiplicadores*, los 3 primeros sistemas de ecuaciones y de realizar las oportunas sustituciones, queda la notable fórmula:

$$(5.8) \quad R = \frac{1}{\varepsilon + \theta}$$

<sup>32</sup> De ahí surge el problema de la transformación de valores en precios.

### *¡La razón-patrón estaba en Marx!*

La razón-patrón sraffiana es la inversa de la suma de la tasa de explotación y de la composición orgánica de capital marxianas<sup>33</sup>. Era de esperar un resultado así, puesto que la razón-patrón es la diferencia entre la producción final y los medios de producción empleados en términos de estos últimos y, por tanto, representa la participación de los salarios y los beneficios por unidad de medios de producción empleadas (en términos monetarios); mientras, la suma de la tasa de explotación y composición orgánica de capital representan la inversa de la participación del factor variable (el trabajo) y su plusvalía (derivada del trabajo) por unidad de capital constante (medios de producción). Como quiera que detrás de las ganancias está –según la concepción marxista– la plusvalía, la cosa parecía abocada a este desenlace.

Curiosa relación de Sraffa con Marx. El alemán centra su análisis a partir de la teoría de la explotación (plusvalía) y lo desarrolla sobre diversos supuestos de lo que define como “composición orgánica de capital”; Sraffa lo centra sobre la razón-patrón y la reducción del capital a trabajo fechado. Son el complemento, como los dos lados del espejo de “Alicia... “. Lo que necesitó decir Marx en 2000 páginas lo escribe Sraffa en un centenar. Uno trabaja con valores, el otro con precios. Para Marx el “capital” es una relación social; para Sraffa es trabajo fechado. En ninguno de los dos aparece el “capital físico”. Marx es determinista<sup>34</sup>, Sraffa nos deja en libertad... condicional. Y sin embargo, se puede pasar de un lado al otro del espejo con la guía de la “razón-patrón” (Sraffa) desde una cara y, desde la otra, con la tasa de explotación y la composición orgánica de capital (Marx). Comparado con estos temas, la polémica sobre la transformación de valores a precios no deja de ser un problema menor.

---

33 Luigi L. Pasinetti casi llega a esta conclusión en su artículo “*Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth*” cuando dice que “Sraffa está postulando precisamente la misma relación entre la tasa media de beneficios y las condiciones de producción en su industria estándar que la relación postulada por Marx entre la tasa media de beneficios y las condiciones de producción en su industria de composición orgánica media de capital”.

34 Caída del capitalismo por disminución de las ganancias ante el aumento de las composiciones orgánicas de capitales.

## 6 La reducción a trabajo fechado

A pesar de lo simple que pudiera parecer, la ecuación que hemos visto y que relaciona tipo de salario, tasa de ganancia y razón-patrón, es el primer asalto de Sraffa al paradigma neoclásico -reforzado con el marginalismo- al menos por 3 cosas: a) no por lo que aparece en ella, sino por lo que no aparece: ¡el capital!; b) porque tampoco aparece ninguna función de producción, aunque no haya que suponer rendimientos constantes; c) porque no aparecen esas productividades marginales, sólo habitables en el *país de las maravillas* de la mano invisible. Y sin embargo, sí se ha hablado de muchas cosas: de relaciones de producción, de medios de producción, producto neto, relaciones intersectoriales<sup>35</sup>, costes de producción, formación de los precios, salarios, ganancias, producción de subsistencia, producción con excedente, mercancía patrón, sistema patrón como invariante a los precios y unidad de medida, tasa de explotación, valores-trabajo, composición orgánica del capital<sup>36</sup>, etc. Y ahora nos espera el segundo asalto al neoclasicismo marginalista: la reducción a trabajo fechado. La operación la introduce Sraffa en el cap. VI de su obra con estas palabras: "Denominaremos "reducción a cantidades de trabajo fechadas a una operación mediante la cual, en la ecuación de una mercancía, los diferentes medios de producción utilizados son reemplazados por una serie de cantidades de trabajo, cada una de las cuales lleva su fecha adecuada". Y a continuación expone la ecuación que caracterizaría lo anterior en lenguaje matemático más al uso:

$$(6.1) \quad p_{it}y_i = w l_{it} + w(1+r)^1 l_{i(t-1)} + w(1+r)^2 l_{i(t-2)} + \dots + w(1+r)^m l_{i(t-m)}$$

donde "i" es como siempre el sector (i=1 a n), "t" es el tiempo actual y "m" es el número de períodos que median desde la producción de los medios de producción directos e indirectos hasta... un tiempo prudencial. La cosa tiene una lógica impecable y es de un sentido común que no debería haber sido pasado por alto: si en todos los productos, sean para el consumo final o como medio o instrumento de producción, interviene la mano del hombre (y de la mujer), *el valor final* de un producto es la suma *en diferentes fechas* de los valores incorporados a él. El hecho que aparezcan los precios como una manera de superar el sistema de trueque -propio de *modos de producción* primitivos-, no significa que las cosas no tengan un valor-trabajo en función de las horas de trabajo incorporadas en su elaboración, aunque luego el mercado<sup>37</sup> ponga precios donde había valores. De una manera más sintética puede escribir la ecuación anterior como sigue:

---

<sup>35</sup> En lenguaje de hoy en día.

<sup>36</sup> Algunas de las cuales no aparecen en la obra de Sraffa, como son todos los conceptos marxistas enumerados. Todo ello y sus conclusiones son responsabilidad del autor de este trabajo.

<sup>37</sup> Qué es esa cosa llamada "mercado" sin más es otra cuestión a revisar. No me refiero a los adjetivos que suelen acompañarle: competitivo, de competencia imperfecta o monopolístico, oligopolístico, etc. Es más sobre los fundamentos.

$$(6.2) \quad p_{it} y_i = w l_{it} + \sum_{k=1}^{k=m} (1+r)^k l_{i(t-k)} \quad \text{para } i=1 \text{ a } i=n$$

donde los precios dependen del tipo de salario, el tipo de interés, el trabajo directo incorporado de cada período (distinto) y el número de períodos que se consideran y donde *no aparece el capital!*. Llegado a este punto, Sraffa podía haber simplificado su esquema aún más haciendo que los valores-trabajo por unidad de producto (implícito) fueran iguales a lo largo del tiempo y con ello proceder a una simplificación generalizada<sup>38</sup>. En lugar de ello, Sraffa toma un período –el último, es decir, el de más alto valor- y trabaja con una ecuación del tipo:

$$(6.3) \quad p_{itm} = w (1+r)^m \times \frac{l_{i(t-m)}}{y_i}$$

porque lo que ahora le interesa es comprobar la relación inversa entre salario y ganancia “a diferentes niveles de distribución” y según “fechas diferentes”<sup>39</sup>. Pero como quiera que hay una relación entre salario y ganancia a través de la razón patrón “ $r = (1-w)R$ ”, Sraffa sustituye el salario en la ecuación (6.3) y queda:

$$(6.4) \quad \text{valores } t. \text{ del } t. = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \times (1+r)^m \times l_{t-m}$$

donde hemos respetado la denominación “*valores del término del trabajo*”, que el economista italiano emplea en versión de L. A. Rojo. Sraffa entiende que estos *valores* “...pueden ser considerados como los elementos constitutivos del precio de una mercancía, cuya combinación en varias proporciones puede dar lugar, con la variación del tipo de beneficio, a complicados esquemas de movimientos de precios en varias alzas y bajas”. El camino ha sido largo pero, paso a paso, Sraffa ve cumplido su sueño de demostrar que, a diferencia del paradigma neoclásico marginalista donde la relación entre el precio y “la retribución del capital” es proporcional, aquí puede comprobarse en (6.4) que primero asciende, llega a un máximo y luego desciende, con diferentes intensidades en función de la razón-patrón y el período a considerar. Y en este camino ha sido determinante su invención –¿o es en realidad un descubrimiento?- de la razón-patrón, porque ha permitido eliminar el salario y dejar frente a frente los valores de los productos y las ganancias –en este caso- sin productividades marginales que lo justifiquen y amparen. Al derivar la ecuación (6.4) respecto al *tipo de beneficio* “ $r$ ” sale:

$$(6.5) \quad m = \frac{1+r}{R-r}, \quad \text{o bien que} \quad r = \frac{mR-1}{1+m}$$

<sup>38</sup> Que el autor de este trabajo hará por su cuenta.

<sup>39</sup> Pág. 59 de “Producción de...”.

que son las fórmulas correspondientes al valor máximo que alcanza *el valor del trabajo sraffiano* en el período “*m*” y para el *tipo de beneficio* “*r*”. Una explicación económica de este vaivén de subida de precios primero y bajada después puede ser explicado de la siguiente forma: Si, por el motivo que sea, las ganancias aumentaran, los empresarios podrían aumentar los precios -dentro del modelo sraffiano (ecuación (1.5))- , pero ello repercutiría en una disminución de la tasa de salario. Pero si disminuye la tasa de salario, las empresas que, a su vez compran medios de producción, para mantener la misma tasa de beneficios tendrán que bajar los precios tarde o temprano.

Llegado a este punto a mí me deja un tanto desconcertado esta derivación hacia “valores del término del trabajo”, esta especie de conformismo que parece entrarle al economista italiano. Muy bien podría haber seguido adelante y, en lugar de que la *reducción a trabajo fechado* de esa cosa llamada “*capital*” le sirviera para comparar dos momentos distintos de una mercancía o dos mercancías con apenas diferencias en su capitalización, hubiera podido -decíamos- haber pasado a una fórmula matricial del tipo (6.6) y que luego veremos:

$$(6.6) \quad p_t = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \times \frac{(1+r)^{t-i} - 1}{r} \times L_y + (1+r)^i p_{t-i} A^i$$

y con “ $(1+r)^i p_{t-i} A^i$ ” tendiendo a cero, dado que “*A*” es productiva

con tal de que hubiera supuesto unas relaciones *trabajo/producto* constantes “*L<sub>y</sub>*”. Nada extraño, por otra parte, si tenemos en cuenta que se está suponiendo tasa de salario constante y tasa de beneficio iguales a lo largo del tiempo (de “*t-i*” a “*t*”), aunque se le de valores diferentes (pero con los mismo valores para todo “*i*”). Las conclusiones no varían sustancialmente, pero sí es interesante los movimientos de precios que se producen en (6.6) en relación a los de (6.4). En efecto, estos movimientos son más explosivos con el paso del tiempo si “*r*” permanece no muy cerca de “*R*” y sólo se produce la caída brusca de los precios a causa del factor “ $(R-r)/R$ ” cuando “*r*” se acerca a “*R*”. Creo que Sraffa no se quiso complicar la vida y se quedó en lo esencial; con ello intentaría permanecer en un grado de abstracción tal que le permitiera soportar las críticas que le llegaran.

## 7. Extensión del modelo de trabajo fechado

A pesar de lo dicho en el punto anterior y lo que supone como ataque realmente a la concepción marginalista del capital, el capítulo VI de Sraffa no deja de ser algo decepcionante por la aparente modestia que demuestra, incluso en las conclusiones que el propio Sraffa extrae. Así, acaba rematando la faena de este capítulo con estas palabras: "De aquí se sigue que si el salario se reduce en términos de cualquier mercancía (da igual que se trate de una mercancía que consiguientemente se elevará o descenderá respecto del patrón), el tipo de beneficio aumentará; y para un aumento del salario sucederá lo contrario"<sup>40</sup>. Conclusión, por otra parte, que ya se ha extraído con su ecuación de la *razón-patrón*, que relaciona *el tipo de salario, el tipo de beneficio y esta razón-patrón*. Casi nos invita el italiano a sacar las conclusiones por él y son 2 y muy importantes: a) la desaparición del capital como ente propio, convirtiéndose en *mercancía que sirve para producir mercancías*; b) que los precios se forman y calculan simultáneamente con las ganancias presentes y pasadas y, por tanto, dependientes de la distribución de la renta y no de productividades dependientes de angelicales funciones de producción inocuas a los precios. Y ello es posible merced a la combinación de la reducción de los valores (o precios, como gustéis) a trabajo fechado y su gran descubrimiento: *la razón-patrón*.

¿Cómo seguir o completar el capítulo VI? Supongamos una economía estacionaria donde cada año se produce lo mismo, con los mismos medios y el mismo trabajo homogéneo, pero en la que los precios varían de un año a otro. Para el año "t", la ecuación matricial que definiría la economía sería la de Sraffa que ya hemos visto:

$$(7.1) \quad p_t = w L_y + (1 + r) p_{t-1} A$$

pero con la diferencia de que los precios de los medios de producción ya no tienen porqué ser iguales a los precios de los productos finales<sup>41</sup>.

En el sistema de ecuaciones (7.1) hemos hecho un cambio respecto a la ecuación (2.5) porque hemos posmultiplicado ésta por la inversa de "Y":

$$p_t Y Y^{-1} = w L Y^{-1} + (1+r) p_{t-1} X Y^{-1}$$

que nos da (7.1), dado que *los coeficientes técnicos*<sup>42</sup> "A" surgen de posmultiplicar esta matriz por el inverso de productos finales ("A=XY<sup>-1</sup>"); además el trabajo "L" lo hemos convertido en trabajo por unidad de

---

<sup>40</sup> Pág. 64 de "Producción de...".

<sup>41</sup> Debería ser evidente que los precios pueden ser distintos en el lado izquierdo de la ecuación que en el lado derecho porque tenemos "2n" ecuaciones ["n" en (7.1) + "n" en (7.5)] y sin embargo "n+2" variables ("2n" precios + "w"+"r"). En cambio, en los modelos de equilibrio general walrasiano, o de cualquier otro tipo, no ocurre esto si la intención es buscar un conjunto de precios, salarios y beneficios (intereses, ganancias) de equilibrio.

<sup>42</sup> Dado que hemos partido del supuesto de que estamos en una economía estacionaria, es decir, que todos los años se produce y se consume lo mismo (o al menos en las mismas proporciones). Esto es lo mismo que suponer que se dan rendimientos constantes. Por ello nos hemos alejado de Sraffa al aceptar –una concesión importante– coeficientes técnicos.

producto final (" $\mathbf{L}_y = \mathbf{L}\mathbf{Y}^{-1}$ "). Sigamos. A su vez, los precios del año " $\mathbf{t-1}$ " dependerían de los del año " $\mathbf{t-2}$ ":

$$(7.2) \quad p_{t-1} = w L_y + (1+r) p_{t-2} A$$

y así continuaríamos hasta el año " $\mathbf{t-i}$ ". Procediendo a la cadena de sustituciones quedaría:

$$(7.3) \quad p_t = w[1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{t-i-1}]L_y + (1+r)^i p_{t-i} A^i$$

donde los precios no han desaparecido, pero se ha reducido su dependencia a " $i$ " períodos. Lo que sí tenemos es una progresión geométrica dentro del corchete cuyo primer término es " $1$ ", su razón es " $1+r$ " y su último término es " $(1+r)^{t-i-1}$ ", por lo que la ecuación (7.3) se convierte en:

$$(7.4) \quad p_t = w \frac{(1+r)^{t-i} - 1}{r} L_y + (1+r)^i p_{t-i} A^i$$

y donde se ve que hemos sintetizado la ecuación (6.2) de Sraffa y, además, la hemos simplificado al considerar que *el trabajo incorporado a la producción no ha variado*. Pero si no conseguimos deshacernos del segundo sumando del lado derecho de la ecuación sólo habremos andado la mitad del camino. Vamos hacerlo con sentido económico e inspirados por la guía del italiano y planteamos la ecuación:

$$(7.5) \quad p_t = (1 + R_1) p_{t-1} A$$

donde " $\mathbf{R}_1$ " representaría una "razón-patrón interanual", ya que buscaría relacionar el producto neto final de un año con el anterior. Si hacemos lo propio para el año " $\mathbf{t-2}$ " y años sucesivos, y procedemos a la cadena de sustituciones de forma análoga de como se ha hecho con (7.1) y siguientes, quedaría la expresión:

$$(7.6) \quad p_t = \prod_{k=1}^{k=i} (1 + R_k) p_{t-i} A^i$$

donde

$$\prod_{k=1}^{k=i} (1 + R_k) = (1 + R_1) \times \dots \times (1 + R_i)$$

porque las "razones-patrón interanuales" va variando de año en año. Puede entenderse también como una "razón-patrón empírica", porque nada impide tomar los precios de un año junto con el anterior y comparar la producción neta final del primero respecto a los medios de producción del año anterior.

Si ahora sustituimos<sup>43</sup> (7.6) en (7.4), pero eliminando " $p_{t-i}A^i$ ", queda la notable ecuación matricial:

$$(7.7) \quad p_t = w \times \left[ \frac{1}{1 - \frac{(1+r)^i}{\prod_{k=1}^{k=i} (1 + R_k)}} \right] \times \frac{(1+r)^{t-i} - 1}{r} \times L_y$$

y de aquí se puede extraer algunas conclusiones no triviales:

- En este estado estacionario de la economía los precios son linealmente proporcionales a los salarios.
- En cambio, la relación entre precios y ganancias es más compleja y si reemplazamos el tipo de salario por la fórmula de Sraffa " $w=(R-r)/R$ ", el precio tenderá a bajar de acuerdo con ésta, pero irá en sentido contrario con el último multiplicando de (7.7), por ser la suma del *trabajo fechado del capital*<sup>44</sup>.
- También influirán en los precios la relación entre el tipo de beneficio " $r$ " y las que hemos llamado "razones-patrón interanuales", las " $R_k$ ". Lo que nos dice (7.7) es que cuanto menores sean los beneficios respecto a estas "razones interanuales" más tenderán a bajar los precios; y subirán si ocurre lo contrario. En el caso de que la tasa de beneficio " $r$ " se acercara a las "razones-patrón empíricas" (" $R_k$ ") de tal manera que:

<sup>43</sup> "Sustituir" no es el verbo adecuado cuando se trabaja con matrices. En realidad hay que despejar " $P_{t-i}$ " posmultiplicando la ecuación (7.6) por la inversa de " $A^i$ ".

<sup>44</sup> Se puede comprobar dando valores lo sensible que son los precios a los aumentos de las ganancias " $r$ " respecto a " $R$ ". Traducido a la realidad y a partir de este modelo de economía estacionaria, se puede concluir que si en un país, por mor de una monopolización u oligopolización de forma repentina de sectores estratégicos de la economía, pudiera ocurrir que los gestores, directores de empresas (capitalistas) aumentaran sus ganancias y simultáneamente bajaran los precios de la economía (o al menos se estancaran), y con ello se produciría una *recesión económica deflacionista*. Este simple modelo sraffiano podría explicar la crisis económica de la URSS tras la "perestroika" y su reconversión en una "economía de mercado". No hubo aumento de inversiones y productividades – la " $R$ " y las " $R_k$ "- y sí en cambio un aumento de las ganancias (" $r$ ") respecto a la "razón-patrón". Este modelo explica porqué puede ocurrir simultáneamente 3 cosas: recesión económica, aumentos extraordinarios de los beneficios y una disminución de los precios o, al menos, una subida moderada de los precios. Para la *teoría neoclásica marginalista* ocurriría lo contrario: *necesariamente* un aumento notable de los precios. En efecto, de acuerdo con la retribución de los factores según (7.10), si las productividades marginales no variaran porque sólo existiera inversión de reposición y las ganancias aumentarían rápidamente como consecuencia de cambios institucionales, legales o de mercado que permitieran un fenómeno de rápida monopolización y oligopolización, ello traería como consecuencia *un aumento de los precios y, por tanto, nunca una recesión inflacionista*. Neoclásicos y marginalistas –neoliberales de hoy- no tienen una explicación coherente de lo que ocurrió en la URSS al pasar del "socialismo realmente existente" a una "economía de mercado realmente existente". Las valoraciones políticas de lo que ocurrió ya es otra cosa, pero ahí no entramos en este trabajo.

$$\text{si } r \rightarrow R_k \text{ tal que } r \rightarrow i \sqrt[k=i]{\prod_{k=1} (1 + R_k)} - 1 \Rightarrow 1 - \frac{(1+r)^i}{\prod_{k=1} (1 + R_k)} \rightarrow \text{cero} \Rightarrow p_t \rightarrow \text{inf}$$

los precios aumentarían exponencialmente<sup>45</sup>.

- d) Si la economía es muy poco productiva, es decir, si los valores de las "razones interanuales" son pequeños, los beneficios debieran ser también muy limitados porque, de lo contrario, los precios aumentarían notablemente; y es así porque, como puede comprobarse dando valores a (7.7), los precios serían relativamente sensibles a las variaciones de "r" respecto a "R<sub>k</sub>" si "r" estuviera cerca de "R<sub>k</sub>".
- e) Los precios son directamente proporcionales a los requerimientos de trabajo por unidad de producto ("L<sub>y</sub>"), que son los inversos de la productividad del trabajo; y viceversa, a más productividad, menores precios.
- f) El esquema sraffiano no es determinístico, las ganancias y salarios no vienen determinados "técnicamente" por supuestas "productividades marginales", sino socialmente, como correlación de fuerzas; a cambio impone límites y relaciones entre ambos; además mide la influencia y el sentido<sup>46</sup> de los movimientos de salarios y ganancias sobre los precios.
- g) En todo caso, para que los precios -iy serían todos los precios!- fueran positivos, la tasa de beneficio debería ser menor que<sup>47</sup>:

$$(7.8) \quad r \leq i \sqrt[k=i]{\prod_{k=1} (1 + R_k)} - 1$$

Damos ahora la ecuación matricial (7.7), reemplazando el tipo de salario por la razón-patrón sraffiana:

<sup>45</sup> Esta posibilidad de subida de los precios al infinito la contempla el propio Sraffa en el apéndice B de su libro (pág. 126) cuando dice que "consideremos una mercancía que entra en su propia producción en un grado desusadamente grande". La diferencia con lo que sucede en este modelo son varias: a) Sraffa huye de un modelo general y sólo contempla el problema de la subida de los precios de una mercancías ("las habas") a medida que aumentarían los beneficios; b) su discusión se centra en si la mercancía en cuestión es básica o no básica; c) la huída al infinito del precio de "las habas" sólo podría ocurrir si esta mercancía "se toma como patrón de precios"; d) Sraffa no puede concretar las condiciones de esta posibilidad, puesto que no hace explícito el esquema general matemático que tenía; e) a cambio, Sraffa cobra ventaja por haber distinguido desde el principio entre productos básicos y no básicos.

<sup>46</sup> Más de la mitad de las 133 páginas del libro de Sraffa en la versión española de "oikos" las pasa el economista italiano valorando los movimientos de precios en relación a los movimientos de la tasa de beneficio y tasa de salarios a medida que van variando los supuestos de partida.

<sup>47</sup> Para el caso de la producción simple (una mercancía por empresa o sector). En el caso de la producción conjunta este requisito ya no se cumple, porque tenemos una pluralidad de productos finales (outputs) por cada mercancía o sector (inputs) que entra como medio de producción.

$$(7.9) \quad p_t = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \times \left[ \frac{1}{1 - \frac{(1+r)^i}{\prod_{k=1}^{k=i} (1+R_k)}} \right] \times \frac{(1+r)^{t-i} - 1}{r} \times L_y$$

Esta ecuación puede interpretarse como el caso general que contempla Sraffa en el cap. VI ("reducción a trabajo fechado") de su libro. En efecto, ya la hemos visto en (6.4):

$$(6.4) \quad \text{valores } t. \text{ del } t. = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \times (1+r)^m \times l_{t-m}$$

que puede ser considerado como un caso particular de la (7.9).

Compárese ahora la complejidad de la fórmula (7.9), a pesar de la simplificación que hemos hecho de la economía -estado estacionario, con "L", "Y", "X" invariables-, con la de la retribución del capital o del trabajo en la función de producción neoclásica:

$$(7.12) \quad p = w \times \frac{1}{dY/dL} = r \times \frac{1}{dY/dK}$$

donde "r" es el tipo de interés (tasa de ganancia, tasa de beneficio), y "dY/dK" sería la derivada del producto respecto al "capital", suponiendo que tuviéramos una función del tipo "Y=F(K,L)" que relacione ambas cosas sin mayores problemas<sup>48</sup>; análogamente tendríamos la retribución del factor trabajo "w".

En esta función neoclásica juegan un papel determinante la divisibilidad y la sustituibilidad: la primera, para que sea posible el cambio suave entre "el capital" y producción y la consiguiente variación también suave (marginal) del tipo de beneficio; la segunda para que pueda sustituirse capital por trabajo o lo contrario. En la economía neoclásica marginalista, un aumento de las ganancias determinaría necesariamente un aumento de los precios si la "productividad marginal del "capital" no variara; en la economía sraffiana no necesariamente: los precios podrían aumentar decrecientemente al principio a medida que aumentarían las ganancias, para llegar a un máximo y luego disminuir.

En la economía de raíz sraffiana no juega un papel relevante la sustituibilidad entre medios de producción y trabajo -aunque no lo impide-,

<sup>48</sup> Ha de ser continua, derivable, con  $dY/dK > 0$ ,  $d(dY/dK)/dK < 0$ , siendo "K" -el capital- una función agregada de "medios de producción" inocua a los precios. Un estudio monográfico de la función de producción se puede ver en *Production functions*, de David F. Heathfield, 1971.

porque no hay procesos de optimización<sup>49</sup>; sí resulta en cambio relevante la relación entre producto final y trabajo –como ya hemos visto– cuando estudia el economista italiano las variaciones de precios en relación a las variaciones de beneficios y salarios<sup>50</sup>.

---

<sup>49</sup> O al menos no aparecen explícitos. No obstante, nada se ha dicho hasta ahora sobre cómo se produce y para quién, porque se parte de unos medios de producción y productos finales dados, por lo que no veo incompatibilidad entre un modelo sraffiano y la introducción de variables optimizables, siempre y cuando el modelo goce de los grados de libertad suficientes como para que el reparto de la renta venga determinado exógenamente. Sraffa dedica al final de su libro un capítulo sobre "*desplazamiento en los métodos de producción*" (cap. XII), que hoy llamaríamos *elección de técnicas*.

<sup>50</sup> Sraffa no emplea "coeficientes de producción" porque no quiere entrar en la polémica de los rendimientos y deja abierta a cualquier posibilidad, dado que nada se nos dice de cómo se forman los "Y" y los "X". Para Keynes, Sraffa trabajaba con el supuesto de rendimientos constantes. Si es así, Keynes no entendió nada del sentido último de "Producción de...".

## 8. Producción conjunta

Es este uno de los capítulos más interesantes del libro de Sraffa, pero aquí nos vamos a limitar a un par de aspectos del libro del italiano. Qué entiende Sraffa por "producción conjunta" lo explica en el cap.- VII<sup>51</sup> suponiendo que "dos de las mercancías son producidas conjuntamente por una sola industria (o mejor por un solo proceso, pues esta denominación resulta más apropiada en el presente contexto). *Las condiciones ya no serían suficientes para determinar los precios*<sup>52</sup>. Habría más precios a determinar que procesos; y, por tanto, habría más precios a determinar que ecuaciones para determinarlos". Sin embargo, en la discusión posterior solventa el problema haciendo que "el número de procesos independientes en el sistema fuera igual al número de mercancías producidas". De alguna forma Sraffa se da cuenta que en la producción conjunta lo significativo no son las empresas sino lo que él llama "procesos", sea cual sea el número de empresas que lo sustenten (pero, lógicamente, menor que el de procesos). Además admite que algunos de los productos y/o medios puedan ser cero. Según esto<sup>53</sup>, la ecuación que describiría el estado de la economía sería la habitual, pero con un cambio en la matriz de productos finales:

$$(8.1) \quad \sum_{k=1}^m p_k y_{kj} = w l_j + (1+r) \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \quad \text{para } j=1 \text{ a } j=n$$

donde "Y" ya no es una matriz cuadrada sino "mxn" y sus elementos pueden ser mayores o iguales a cero:

$$(8.2) \quad [p_1 \quad \cdots \quad p_n \quad , \quad p_{n+1} \quad \cdots \quad p_m] \times \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \\ y_{n+1,1} & \cdots & y_{n+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= w [l_1 \quad \cdots \quad l_n] + (1+r) \times [p_1 \quad \cdots \quad p_n] \times \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

y que podemos sintetizar con la expresión matricial:

<sup>51</sup> Pág. 68 de "Producción de..."

<sup>52</sup> La cursiva es del autor de este trabajo.

<sup>53</sup> No niego que pueda haber otras interpretaciones de qué entiende Sraffa por "producción conjunta", pero a mí se me ha ocurrido esta.

$$(8.3) \quad \underset{1 \times m}{P} \underset{m \times n}{Y} = \underset{1 \times n}{wL} + (1+r) \underset{1 \times n}{P} \underset{n \times n}{X}$$

y donde, en efecto, hay más precios (“**m**”) que ecuaciones (“**n**”). La razón de ello es que no hay que suponer que todos los bienes finales (productos) intervengan como medios de producción. Hasta ahora, la discusión y distinción que hacía Sraffa sobre bienes básicos y no básicos era meramente heurística; ahora, en cambio, la distinción cobra una importancia determinante. Recordando que los productos *básicos* son aquellos productos finales de un sector que entran como medios de producción en su propio sector o en otros, mientras que productos *no básicos* son los que *nunca* entran como medios de producción<sup>54</sup>, partimos el vector de precios en 2 tales como:

$$(8.4) \quad p_a = [p_1 \cdots p_n] \quad , \quad p_b = [p_{n+1} \cdots p_m]$$

y hacemos lo mismo con los productos finales, llamando “**Y<sub>a</sub>**” a los productos finales que son *básicos* y “**Y<sub>b</sub>**” a los *no básicos*:

$$(8.5) \quad Y_a = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad Y_b = \begin{bmatrix} y_{n+1,1} & \cdots & y_{n+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m,1} & \cdots & y_{m,n} \end{bmatrix}$$

con lo que la ecuación (8.3) queda:

$$(8.6) \quad p_a \times Y_a + p_b \times Y_b = wL + (1+r) p_a X$$

Si ahora hacemos cero la tasa de salario y posmultiplicamos primero por la transpuesta de “**Y<sub>b</sub>**” y luego por la inversa del producto “**Y<sub>b</sub>Y<sub>b</sub><sup>T</sup>**”, nos da que los precios de los productos no básicos “**P<sub>b</sub>**” se determinan a partir de los precios de los básicos con la matriz (en este caso, vector):

$$(8.7) \quad p_b = (1 + R_{ab}) p_a [X - Y_a] Y_b^T [Y_b Y_b^T]^{-1}$$

donde “**R<sub>ab</sub>**” es la *razón-patrón* de la producción conjunta. Y, a diferencia de la producción *simple*, con la producción conjunta no se puede asegurar que todos los precios de los productos *no básicos* sean positivos<sup>55</sup>. El propio

<sup>54</sup> Sin embargo, en el libro Sraffa hace mayores distinguos entre los productos no básicos (cap. VIII, pág. 74). Aquí no se sigue este camino porque sólo abordamos limitadamente los senderos abiertos por el economista italiano.

<sup>55</sup> En la producción simple se obtiene un conjunto de precios positivos si se cumplen 2 condiciones: a) que la matriz de requerimientos “**A**” sea *productiva*; b) que la tasa de beneficio no sea más alta que la *razón-patrón*. Para una discusión sobre este tema véase:

Sraffa se da cuenta de ello cuando, en el mismo capítulo, dice que “mientras las ecuaciones puedan ser satisfechas por soluciones negativas para las incógnitas, sólo serán practicables aquellos métodos de producción que, en las condiciones efectivamente dominantes (es decir, al salario dado o al tipo de beneficio dado), sólo implican precios positivos”<sup>56</sup>. Para evitar esta posibilidad que se da en su modelo –cosa que le debió parecer horrorosa–, el economista italiano, en este mismo capítulo, considera el hecho de que el número de “procesos debería ser igual al número de mercancías”<sup>57</sup>. Sin embargo, podemos eliminar algo de la incertidumbre que genera el signo de la diferencia “ $\mathbf{X}-\mathbf{Y}_b$ ” en los precios la ecuación matricial (8.7) porque tenemos *otra razón-patrón*, cual es la derivada de considerar sólo los productos finales que son básicos, es decir, los que entran como medios de producción en el conjunto del sistema:

$$(8.8) \quad p_a Y_a = (1 + R_a) p_a X$$

donde lo relevante es que ahora tenemos 2 “razones-patrón”: la correspondiente al sistema real de producción conjunta “ $\mathbf{R}_{ab}$ ”<sup>58</sup> y la correspondiente a (8.8). Pues bien, de los 2 últimos sistemas de ecuaciones se obtienen los precios de los productos no básicos a partir de los básicos<sup>59</sup>:

$$(8.9) \quad p_b = (R_{ab} - R_a) p_a X Y_b^T \left[ Y_b Y_b^T \right]^{-1}$$

El cambio de la (8.9) respecto a la (8.7) es que se ha sustituido la diferencia formada por la matriz de productos finales básicos “ $\mathbf{Y}_a$ ” y medios de

“Sraffa’s Prices” de Sydney Afriat, de la *Università degli Studi di Siena*, “quaderni” 474 (2006). Se puede obtener en la web: [www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf](http://www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf)

<sup>56</sup> “Producción de ...”, cap. VII, pág. 68.

<sup>57</sup> Sraffa se dio de bruces con el problema siguiente: si tenemos más productos finales no básicos (“ $\mathbf{m}-\mathbf{n}$ ”) que medios de producción y precios básicos (“ $\mathbf{n}$ ”), el sistema (8.9) está subdeterminado y el tiene infinitas soluciones; si tiene más, está sobredeterminado y no tiene ninguna. Sólo cuando “ $\mathbf{m}-\mathbf{n}=\mathbf{n}$ ” la tiene, es decir, cuando “ $\mathbf{m}=\mathbf{2n}$ ”. Sraffa se percató de ello (cap. VIII, págs. 76 y siguientes) cuando trata el tema de los *multiplicadores* en la producción conjunta. Como solución habla de “eliminar completamente mediante transformaciones lineales las mercancías no básicas, tanto del lado de los medios de producción como de los productos”. Aquí el economista italiano peca de optimismo, porque esa posibilidad no es elegible; además, si eliminamos algunas ecuaciones entonces no obtenemos *todos* los precios de las mercancías no básicas. No creo que este sea el camino. Para el esquema de pensamiento sraffiano, la subdeterminación no es un problema, puesto que eso da cancha a la determinación de los precios mediante leyes de oferta y demanda, por ejemplo, y a la determinación de salarios y ganancias mediante la negociación/confrontación social; para los modelos marginalistas de equilibrio general al uso sería un desastre.

<sup>58</sup> Para calcular “ $\mathbf{R}_a$ ” siempre se podrá elegir el sector cuya relación entre producto neto y medios de producción sea la menor (pero positiva), por lo que “ $\mathbf{R}_a$ ” será positiva, a pesar de que ahora pueda ser compatible con que la matriz de coeficientes técnicos “ $\mathbf{A}=\mathbf{X}\mathbf{Y}^{-1}$ ” sea productiva y, sin embargo, se den sectores (filas) para los que la diferencia “ $\mathbf{Y}_{ij}-\mathbf{X}_{ij}$ ” sea negativa para algún “ $\mathbf{j}$ ”.

<sup>59</sup> Que a su vez se han obtenido por el sistema de ecuaciones matriciales del epígrafe 2 de este trabajo, pero con la modificación de la ecuación (8.3).

producción "X" por la de la diferencia entre las 2 "razones-patrón" " $R_{ab}-R_a$ ", que es positiva<sup>60</sup>. Eso, no obstante, no garantiza la positividad de los precios debido a la existencia de la función inversa en el segundo lado de la igualdad. ¿Qué es lo que ha cambiado? Cuando estábamos en la producción simple y el sistema era productivo –cosa que ocurre cuando, para todos los sectores, la suma de los medios de producción de cada sector es menor que el producto final de cada sector-, los medios de producción de un sector – que eran productos finales de otro- se pagaban a unos precios que incorporaban una tasa de ganancia (beneficio) que no era mayor que la razón-patrón, calculada a su vez a partir del sector cuya relación entre producto neto y medios de producción era *el menor* de todos los sectores. Unidas las piezas, el resultado es que ningún sector ha incorporado en sus pagos a los medios de producción que utiliza un coste superior a la productividad –diferencia entre producto neto y medio de producción- incorporada al sistema y a su propio sector. El resultado es que los precios son positivos. Ahora, con producción conjunta no se reúnen esos requisitos, aún cuando puedan cumplirse alguno de ellos.

Con los multiplicadores pasa lo mismo que con los precios: ahora no podemos asegurar que *todos* los multiplicadores sean positivos. Sraffa lo expresa al principio del capítulo VIII de su libro, pero con cierta duda o ambigüedad: "Tan pronto como consideramos en detalle la construcción de un sistema patrón con productos conjuntos, resulta obvio que *puede* que algunos de los multiplicadores *tengan* que ser negativos". Es verdad que Sraffa emplea el adjetivo *obvio* –en la traducción española-, que no logra contrarrestar los verbos poder y tener que emplea a continuación. El sistema de ecuaciones que definirían el sistema sería como sigue:

$$(8.10) \quad \mu_{ab} \left[ \sum_{j=1}^n y_{ij} q_j + \sum_{k=n+1}^m y_{ik} q_k \right] = \sum_{j=1}^n x_{ij} q_j \quad \text{para } i=1 \text{ a } i=n$$

siendo " $\mu_{ab}$ ", como antes, *el coeficiente de reducción del producto final del sistema de producción conjunta*, y " $q_j$ ", " $q_k$ " los multiplicadores de los productos básicos y no básicos, respectivamente. Traducido en términos matriciales:

$$(8.11) \quad \mu_{ab} \begin{bmatrix} Y_a & q_a + & Y_b^T & q_b \\ nxn & nx1 & nx(m-n) & (m-n)x1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} X & q_a \\ nxn & nx1 \end{matrix}$$

y la ecuación matricial de la producción conjunta de productos sólo básicos<sup>61</sup>:

<sup>60</sup> Compárese para ello las ecuaciones (8.6) y (8.8) cuando en la primera los salarios valen cero.

<sup>61</sup> Cuando estábamos en la producción simple se producía una simetría a la hora de calcular precios y "multiplicadores" porque partíamos de matrices cuadradas, tanto en los medios de producción como de productos finales. Eso ha permitido calcular los "multiplicadores" relacionando la "mercancía-patrón" y la "razón-patrón" a través de los autovalores de la

$$(8.12) \quad \mu_a \begin{bmatrix} Y_a q_a \\ nxn \quad nx1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X q_a \\ nxn \quad nx1 \end{bmatrix}$$

donde " $\mu_a$ " es el coeficiente de reducción para los productos básicos en la producción conjunta. De las dos anteriores ecuaciones obtenemos los multiplicadores del conjunto de sectores no básicos:

$$(8.13) \quad q_b = \left( \frac{1}{\mu_{ab}} - \frac{1}{\mu_a} \right) \times [Y_b Y_b^T]^{-1} \times Y_b X q_a$$

que en términos de las "razones-patrón" quedaría:

$$(8.14) \quad q_b = (R_{ab} - R_a) \times [Y_b Y_b^T]^{-1} \times Y_b X q_a$$

Lo relevante de esta ecuación es que ahora ya no podemos evitar que los multiplicadores " $q_b$ " de la producción de productos no básicos sean negativos porque, aún cuando pudiéramos conseguir un conjunto de multiplicadores para los productos básicos que fueran positivos (los " $q_a$ "), la existencia del factor de la matriz inversa en el lado derecho de la ecuación da lugar a la posibilidad de obtener multiplicadores positivos para algunos sectores y negativos para otros. Visto esto, parece una *boutade* el comienzo del capítulo VIII: "Tan pronto como consideramos... resulta obvio... ". Desde luego parece todo menos obvio, al menos para los multiplicadores de los productos *no básicos*. Unas líneas más abajo reconoce que esto "sólo puede descubrirse mediante la solución del sistema".

Todo el tema de la producción conjunta merece no sólo un epígrafe de un artículo o un capítulo de un libro, sino un libro entero<sup>62</sup>. Aquí sólo hemos dado una interpretación de apenas unas notas, de los primeros compases de la producción conjunta que Sraffa aborda en los capítulos VIII, IX, X y XI de su libro.

matriz cuadrada de "coeficientes técnicos". Ahora no se puede porque *la matriz de productos finales no básicos ("Y<sub>b</sub>") no es, en general, cuadrada*. Esto da lugar a unas complicaciones formales de las que Sraffa era consciente, aunque no lo hiciera explícito formalmente (ver la nota 55). Para simplificar en lo posible el cálculo de los multiplicadores, se ha premultiplicado la transpuesta " $Y_b$ " por la correspondiente submatriz de multiplicadores (" $q_b$ "), a sabiendas de que ahora son las filas de la matriz de los productos finales no básicos las que se utilizan para calcular la suma de productos " $Y_b^T q_b$ " en lugar de las columnas, caso este último imposible por lo que decíamos antes: la matriz " $Y_b$ " no es cuadrada (salvo en el caso particular que contempla el propio Sraffa (pág. 76 de su libro) de " $m=2n$ ", porque en este caso la matriz " $Y_b$ " sería cuadrada).

<sup>62</sup> Un tratamiento más técnico se da en el capítulo 8 del excelente libro de Manuel Ahijado "Distribución, precios de producción y crecimiento" (1982).

## A modo de epílogo

Este trabajo representa, a la vez, una visión parcial y un modestísimo intento de dar a conocer una parte del legado de Sraffa que hemos puesto en conexión con otros modelos, como el ricardiano, neoricardiano y marxista. Ni siquiera se tratan todos los temas abiertos por el economista italiano en su libro comentado. Su libro sirve por igual a la crítica al neoclasicismo y al marginalismo, así como para construir modelos de análisis de comportamiento que llamamos económicos. El giro dado por Sraffa y su vuelta a los clásicos representa un viento de libertad frente al determinismo carcelario de las productividades marginales, óptimos paretianos y existencia de equilibrios generales. Su obra no es una curiosidad, una extravagancia en el callejón sin salida entre la teoría y la realidad al que nos llevan el neoclasicismo, el marginalismo y, ahora, su vástago tardío, el neoliberalismo (también el marxismo althusseriano del *proceso sin sujeto*). Sraffa fue un adelantado a su época, al igual que el D. Ricardo de los costes comparativos. Cuando llegue el día en el que el análisis económico –mejor sociológico– no sea ni de izquierdas ni de derechas, cuando no sea de parte, cuando la ideología sea pedestal y no losa, entonces “Producción de mercancías por medio de mercancías” será un título seminal, una piedra angular inexcusable en la historia del pensamiento económico, una conquista intelectual en pie de igualdad con la ley de la inercia en física, con el inconsciente en psicología, el evolucionismo en las ciencias biológicas, la ley de indeterminación en la mecánica cuántica o la entropía en la termodinámica. Se habrán acabado la búsqueda de los óptimos paretianos, los equilibrios generales competitivos, los agregados imposibles, las parábolas sustitutivas del capital de última trinchera, la retribución según productividades marginales, las inexistentes –aunque deseables– competencias perfectas. Si acaso sobrevivirán como instrumentos de planificación o de regulación de mercados y, en general, de comportamientos económicos deseables, pero irreales. Como dice el poeta inglés, *la culpa no es de nuestra estrella sino nuestra*. Frente a otras visiones, la visión sraffiana goza de grados de libertad, podemos abrir unas puertas a sabiendas de que se cierran otras, pero siempre el número de puertas abiertas supera al de puertas cerradas: por ahí, afortunadamente, se cuele la sociología, la historia, y entonces el economista o calla o se reconvierte.

El keynesianismo y el marxismo y marginalismo son continuaciones lógicas del corpus de conocimientos de su época: el primero rompe el paradigma de la imposibilidad de flexibilidad de precios y salarios y desempleo; el segundo destierra la justificación de las rentas trinitarias (tierra, capital y trabajo) mediante una teoría *inevitable* de la explotación (plusvalía); el tercero es una exacerbación formal de la mano invisible del moralista escocés. En el esquema de Sraffa la teoría económica no explica el reparto de la renta, pero si impone condiciones y acotaciones al mismo. Para el italiano esa cosa llamada “capital” es sólo trabajo fechado, y la economía es un todo continuo de producción de mercancías (bienes y servicios) mediante mercancías pasadas y trabajo presente. Al igual que la mecánica cuántica rompe con el postulado aristotélico de que la naturaleza no da saltos (energía cuantificada), Sraffa entierra productividades marginales justificativas del reparto de la renta, funciones de producción inanes a lo

social, bondades optimizadoras de los mercados y equilibrios generales inexistentes. A cambio nos da la mercancía-patrón, la razón-patrón, el trabajo fechado, la producción conjunta, la fundamental distinción entre bienes básicos y no básicos, excedente, relación no monótona entre de precios y salarios, desplazamiento de métodos de producción, tipo de beneficio, etc.

## Anexo I (Combinación lineal)

Al recontar el número de ecuaciones en el modelo sraffiano (y esto vale para el resto), decíamos que:

$$(aI.1) \quad p_j y_j = (1 + R) \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \quad \text{para } j=1 \text{ a } j=n$$

era una combinación lineal de las ecuaciones del sistema:

$$(aI.2) \quad p_j y_j = w l_j + (1 + r) \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \quad \text{para } j=1 \text{ a } j=n$$

En efecto, si tomamos un coeficiente " $\alpha$ " y lo multiplicamos por cualquiera de las " $n$ " –por ejemplo la " $r$ "– ecuaciones de (aI.2) y hacemos lo mismo con otro coeficiente " $\beta$ " también en (aI.2) –por ejemplo la " $s$ "– e igualamos miembro a miembro a una ecuación cualquiera (por ejemplo la " $m$ ") como:

$$(aI.3) \quad p_m y_m = (1 + R) \sum_{i=1}^n p_m x_{im}$$

planteamos entonces las ecuaciones:

$$(aI.4) \quad \alpha p_r y_r + \beta p_s y_s - w(\alpha l_r + \beta l_s) = p_m y_m$$

$$(aI.5) \quad (1 + r) \times \left[ \alpha \sum_{i=1}^n p_r x_{ir} + \beta \sum_{i=1}^n p_s x_{is} \right] = (1 + R) \times \sum_{i=1}^n p_m x_{im}$$

Y ahora tenemos 2 ecuaciones [las (aI.4) y (aI.5)] y 2 incógnitas (los coeficientes " $\alpha$ " y " $\beta$ ") que nos permiten pasar de cualquier par de ecuaciones del sistema matricial (aI.2) a cualquier ecuación del sistema (aI.3), con lo que queda demostrada la cuestión.

## Anexo II (autovalores)

En algunos manuales de divulgación<sup>63</sup> se aborda el modelo sraffiano a partir de una matriz de coeficientes técnicos "A" tal que:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

donde los " $a_{ij}$ " son *los coeficientes técnicos de producción* que miden la cantidad " $y_{ij}$ " del bien físico "i" que entra en la producción del bien físico "j" por unidad del bien físico "j". Con ello plantean la ecuación general sraffiana ligeramente modificada de esta manera:

$$(aII.1) \quad p = w L_y + (1 + r) p A$$

donde " $A = X \times Y^{-1}$ " y " $L_y = L \times Y^{-1}$ ". Nada más lejos de la manera de pensar sraffiana. Ya hemos visto que para Sraffa los valores de la producción final "Y" y los medios técnicos "X" estaban dados por el sistema económico y no entraba en cómo se formaban. Aceptaba pues las leyes de oferta y demanda y la existencia de rendimientos constantes o no. Pero si se partía de los *coeficientes técnicos* " $a_{ij}$ ", inevitablemente se achacaría al autor –debió pensar Sraffa– que trabajaba con un modelo particular y, lo que es peor, se distraería la atención del objeto principal de su análisis, cual es el mayor y mejor fundamentado ataque a la teoría neoclásica del "capital" y, por ende, a su modelo de distribución de la renta. Tengo la impresión que Sraffa perdió esta batalla. Al menos ha servido para aclarar que la "razón-patrón" de Sraffa no tiene nada de misterioso y está relacionado con los autovalores de la ecuación sraffiana con la que hemos trabajado. Partiendo de:

$$(aII.2) \quad pY = wL + (1 + r) pX$$

si la posmultiplicamos por la inversa de la matriz de productos finales de "Y" obtenemos la (aII.1); si además hacemos que los salarios sean cero nos da:

$$(aII.3) \quad p = (1 + R) pA \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{1 + R} \times p = pA$$

---

<sup>63</sup> Véase el libro de D. Vegara "Economía Política y modelos multisectoriales" comentado en otra nota.

que cualquier matemático, sin más cambios, reconocerá a  $1/(1+R)$  como un autovalor de **(aII.3)**, y que es *el coeficiente de proporcionalidad* " $\mu$ " que ya vimos en el epígrafe 1 al discutir sobre la *mercancía-patrón*.

### Anexo III (sobre la mercancía-patrón)

¿Qué propiedades debería tener un sistema económico que fuera inmune a los precios? Sraffa nos lo dice en el cap. IV (pág. 38): "Supongamos que agregamos del sistema económico existente aquellas fracciones de las industrias básicas individuales que, conjuntamente, forman un sistema completo en miniatura dotado de la propiedad de que las diferentes mercancías están representadas entre sus medios de producción totales *en las mismas proporciones* en que lo están entre sus productos". Pues bien, hagámoslo. Partimos de los valores reales del sistema de producción final "Y" y de medios de producción "X" y llamamos "m<sub>i</sub>" a los coeficientes calculados:

$$(aIII.1) \quad m_i = \frac{y_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}}{\sum_{j=1}^n x_{ij}} \quad \text{para } i=1 \text{ a } i=n$$

Y ahora procedemos a la parte delicada del tema, porque vamos a elegir al "m<sub>i</sub>" que sea el menor de ellos y le vamos a llamar "m" a secas. A partir de ahí debemos reducir los valores físicos de producción final y de medios de producción de tal manera que se cumpla para todos los sectores:

$$(aIII.2) \quad m = \frac{\bar{y}_1 - \sum_{j=1}^n \bar{x}_{1j}}{\sum_{j=1}^n \bar{x}_{1j}} = \frac{\bar{y}_2 - \sum_{j=1}^n \bar{x}_{2j}}{\sum_{j=1}^n \bar{x}_{2j}} = \dots = \frac{\bar{y}_n - \sum_{j=1}^n \bar{x}_{nj}}{\sum_{j=1}^n \bar{x}_{nj}}$$

con lo que nos aseguramos que:

$$(aIII.3) \quad y_i \geq \bar{y}_i \quad \text{y también que} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \geq \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} \quad \text{para } i=1 \text{ a } i=n$$

La ecuación (aIII.3) se puede sintetizar en:

$$(aIII.4) \quad \bar{y}_i = (1 + m) \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} \quad \text{para } i=1 \text{ a } i=n$$

o en términos matriciales:

$$(aIII.5) \quad \bar{Y} I = (1 + m) \bar{X} I$$

¿y como pasar de los datos originales, "y<sub>ij</sub>" y "x<sub>ij</sub>" a los de la mercancía-patrón? Sraffa inventó unos "multiplicadores" "q<sub>i</sub>" tales que:

$$(aIII.6) \quad \bar{y}_i = y_i \times q_i \quad \text{y} \quad \bar{x}_{ij} = x_{ij} \times q_j \quad \text{para } i=1 \text{ a } i=n$$

y sustituyendo en "aIII.4" queda:

$$(aIII.7) \quad y_i q_i = (1 + m) \sum_{j=1}^n x_{ij} q_j \quad \text{para } i=1 \text{ a } i=n$$

y que si hiciéramos  $\mu = 1/(1 + m)$  tendríamos el "coeficiente de reducción de la ecuación" (1.1) del epígrafe 1 de este trabajo<sup>64</sup>.

En términos matriciales la ecuación (aIII.7) con el coeficiente de reducción quedaría:

$$(aIII.7) \quad \mu Yq = Xq$$

$$\mu \times \begin{bmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

que se cumple siempre, sean cuales sean los precios del sistema económico, y que representa un sistema en miniatura construido de acuerdo con los requisitos del texto de Sraffa que hemos mencionado al principio del anexo. Ahora tenemos 2 sistemas de ecuaciones matriciales tales como:

$$(aIII.8) \quad p[\mu Yq = Xq]$$

$$(aIII.9) \quad [pY = (1 + R)pX]q$$

donde la primera ecuación es la (aIII.7) premultiplicada por el vector de precios y la segunda (aIII.9) es la ecuación de la razón-patrón de Sraffa  $pY = (1 + R)pX$  posmultiplicada por los "multiplicadores". Una simple observación nos dice que ambas ecuaciones coincidirán si hacemos  $\mu = 1/(1 + R)$ <sup>65</sup>.

<sup>64</sup> Al obrar así, no solo construye Sraffa la mercancía-patrón y la razón-patrón, sino que se asegura un conjunto de precios positivos para la ecuación (1.5) al aplicar el teorema de Perron-Frobenius. Para una discusión más a fondo véase "Distribución, precios de producción y crecimiento" de M. Ahijado (1982), págs. 49 y siguientes, que recoge a su vez las aportaciones de Garegnani y Pasinetti (1977) sobre el tema.

<sup>65</sup> O lo que es lo mismo, que "m"="R".

La razón-patrón sraffiana ha servido para 2 cosas absolutamente distintas:

- a) para construir un sistema en miniatura del sistema real que es inmune a los precios porque la relación del producto neto físico a los medios de producción en términos físicos son iguales para todos los sectores<sup>66</sup>. De ahí surge la ecuación matricial (**aIII.8**).
- b) para valorar al sistema económico cuando en la ecuación que lo describe -la (2.1)- se hace cero la tasa de salarios; entonces la razón-patrón pasa a representar el valor máximo de los beneficios compatible con un sistema de precios positivos. De ahí sale la ecuación matricial (**aIII.9**).

¡Sólo mediante una intuición extraordinaria y una larga reflexión puede relacionarse ambas cosas!

---

<sup>66</sup> Con lo que al retroceder hacia atrás en la cadena de producción nos encontramos que los productos finales de un sector (o mercancía) son a su vez medio de producción de otro, ambos con la misma relación entre producto final y medio de producción. Y así podemos retroceder en el tiempo. ¿Por qué entonces esta mercancía es compatible con cualquier vector de precios? Porque de la *razón-patrón*, aunque definida de acuerdo en (2.2), hemos deducido que no puede cambiar ya que depende, en última instancia, de la menor de todas las relaciones productos neto/medios de producción (las " $m_i$ ") de todos los sectores, y este es un dato objetivo que se obtiene a partir de los datos originales (y por eso la mercancía patrón es única). Recapitulamos. La *razón-patrón* depende de: a) de los valores físicos de producción y de medios físicos de producción originales; b) de los multiplicadores que sirven para reducir los valores físicos de productos finales y los medios de producción físicos; y los multiplicadores salen del sistema de ecuaciones (1.2) y (1.3), donde los precios no aparecen. Ni (a), ni (b) dependen de los precios, por lo que la *razón-patrón* no depende de los precios.

## Anexo IV (razón-patrón y transformación de valores a precios)<sup>67</sup>

Del epígrafe "5" traemos la relación " $R = 1/(\varepsilon + \theta)$ ". Con ello se obtiene la "razón-patrón sraffiana" en términos de valor marxiano a partir de las definiciones de tasa de explotación y composición orgánica de capital:

$$(a.IV.1) \quad R = \frac{1}{\varepsilon + \theta} = \frac{1}{\frac{S}{V} + \frac{C}{V}} = \frac{V}{S + C}$$

siendo "S", "V" y "C" la plusvalía, los capitales variables y constantes marxianos, respectivamente. Ahora, a partir de la ecuación (4.2)

$$(4.2) \quad pY = (1 + \eta)[wL + pX]$$

vamos conectar la consideración de Sraffa de la razón-patrón con el resultado del epígrafe "5" de tal forma que:

$$(a.IV.2) \quad R = \frac{V}{S + C} = \frac{zV}{zS + zC} = \frac{pY - pX}{pX} = \frac{wL + \eta(wL + pX)}{pX}$$

Y ahora igualamos (opcional) numerador a numerador y denominador a denominador de (a.IV.2) de tal manera que:

$$(a.IV.3) \quad wL + \eta(wL + pX) = zV$$

$$(a.IV.4) \quad pX = zS + zC$$

De acuerdo con (a.IV.2) -donde hemos multiplicado las variables marxianas por unos multiplicadores ("z") o "transformadores de valores a precio"-, para poder comparar categorías económicas de los clásicos medidas en precios (precios, salarios y ganancias) con las categorías marxianas medidas en valores (tasas de explotación, composición orgánicas de capital y valores de productos finales). Las ecuaciones (a.IV.3) y (a.IV.4), que surgen de asimilar las categorías ricardianas (clásicas en general) a las marxianas, merecen un comentario. La primera nos dice que sólo una parte del capital variable (" $zV$ ") retribuye al trabajo mediante salarios (" $wL$ "), resultado coherente con la concepción marxiana de la teoría de la explotación; la segunda (a.IV.4) es más discutible, porque nos dice a su vez que el conjunto de los medios de producción (" $pX$ ") equivalen a la plusvalía (" $zS$ ") y el capital constante (" $zC$ ") marxianos.

---

<sup>67</sup> Una introducción histórica al problema de la "transformación" puede verse en "El método lógico y el problema de la transformación", de Fred Moseley, que se puede obtener en internet en: <http://www.azc.uam.mx/publicaciones/etp/num7/a8.htm>

De las ecuaciones matriciales (a.IV.3), (a.IV.4) y (5.1) del epígrafe "5" obtenemos:

$$(a.IV.4) \quad wL + \eta[wL + pX] + pX = pY = zS + zV + zC = z\Lambda Y$$

Es decir: 
$$pY = z\Lambda Y$$

y posmultiplicando por la inversa de "Y" queda:

$$(a.IV.5) \quad p = z\Lambda$$

que es la ecuación matricial de transformación de valores a precios, una vez conocidos los multiplicadores (coeficientes de transformación) "z". Además "p - zΛ" son los autovalores del autovector de productos (bienes y servicios) finales ("Y") que surgen de la ecuación matricial "pY - zΛY = 0".

Con ello calculamos la relación entre precios y valores<sup>68</sup>.

Ahora, de la ecuación matricial "pY = zΛY" y la de la razón-patrón sraffiana "pY = (1+R)pX", eliminamos "pY" y posmultiplicamos lo que queda por la inversa de los medios de producción "X" y obtenemos:

$$(a.IV.6) \quad p = \frac{1}{1+R} \times z \Lambda Y X^{-1}$$

de donde podemos pasar de valores "zΛ" a precios "p" con ayuda de la razón-patrón<sup>69</sup>. ¡Los precios de Ricardo y los valores de Marx unidos por la razón-patrón de Sraffa!

Si la ecuación (a.IV.6) la posmultiplicamos por "X" y hacemos que la razón-patrón sea cero, es decir, que no se produzca excedente<sup>70</sup>, se obtiene:

$$(a.IV.7) \quad pX = z\Lambda Y$$

que teniendo en cuenta (a.IV.5) sale "pX = pY", que es la producción de subsistencia. De la ecuación matricial (a.IV.7) sale:

<sup>68</sup> ¡Quién le iba a decir a Marx que el problema de la transformación de valores a precios es la solución no trivial de un sistema de ecuaciones homogéneo a través del cálculo de los autovalores (y autovectores) del sistema!. Marx era consciente (libro III de la "Teoría de las Plusvalías") de que su solución no era correcta matemáticamente, porque los medios de producción que unos empresarios se compran a otros se hacen a través de los precios y no de sus valores.

<sup>69</sup> Se puede obtener la fórmula inversa para pasar de precios a valores, pero eso carece de sentido económico e histórico. Los precios se ven sometidos a relaciones de compra-venta (al mercado que dicen los que intentan exonerar de juicios de valor los comportamientos), mientras que los valores marxianos dependen del tiempo de trabajo incorporado en la producción de las mercancías. Las matemáticas para la economía son un instrumento y no un fin.

<sup>70</sup> Producción de subsistencia del cap. I del libro de Sraffa.

(a.IV.8)

$$p = z \Lambda Y X^{-1}$$

que es el caso particular de Ricardo, Marx y, en general, de los clásicos, en el que los precios serían proporcionales a los valores de no haber ganancias (beneficios) en la economía (razón-patrón cero en el esquema sraffiano). Y si los multiplicadores fueran iguales entre sí:

(a.IV.9)<sup>71</sup>

$$z_c = z_1 = z_2 = \dots = z_{n-1}$$

(a.IV.10)<sup>72</sup>

$$p = z_c \Lambda Y X^{-1}$$

Sin embargo, la ecuación (a.IV.5) no es enteramente satisfactoria en este contexto al menos por 2 motivos: a) desde el punto de vista del esquema marxiano porque las empresas (como ya señaló el propio Marx) compran bienes y servicios a otras empresas según sus precios y no según sus valores-trabajo; b) porque la ecuación (a.IV.5) no distingue entre productos básicos y no básicos<sup>73</sup>. Una ecuación matricial de transformación de valores a precios que cumpliera este último requisito sería:

$$(a.IV.11) \quad \begin{matrix} p_a & \times & Y_a & + & p_b & \times & Y_b & = & z_a & \times & \Lambda_a & + & z_b & \times & \Lambda_b \\ 1 \times n & & n \times n & & 1 \times (m-n) & & (m-n) \times n & & 1 \times n & & n \times n & & 1 \times (m-n) & & (m-n) \times n \end{matrix}$$

que surge de sumar miembro a miembro 2 ecuaciones matriciales en el que los precios fueran proporcionales a los valores trabajo y donde se hiciera ese distinguo entre productos básicos y no básicos, pero con una matización: los básicos serían los de autoconsumo de los empresarios, es decir, los que se venden a sí mismo por su valor-trabajo. ¿Seguirán, según esto, siendo los precios de los no básicos proporcionales a sus valores? Para responder a ello echamos mano de la ecuación de la razón-patrón sraffiana para productos básicos:

$$(a.IV.12) \quad \begin{matrix} p_a & \times & Y_a & = & (1 + R_a) & \times & p_a & \times & X_a \\ 1 \times n & & n \times n & & & & 1 \times n & & n \times n \end{matrix}$$

<sup>71</sup> Es claro que *no* todos los coeficientes de transformación pueden valer "1", porque también ha de cumplirse la ecuación (5.7) marxiana que nos dice que *la suma de los productos finales de una economía en términos de precios ha de ser igual que en términos de valores*. Con ello conseguiríamos "n" ecuaciones ("n-1" de "a.IV.9" y una de la "5.7") y "n" coeficientes de transformación. Una solución satisfactoria al problema de la transformación de valores a precios no pasa necesariamente por la igualación de los "coeficientes de transformación" entre sí, siempre y cuando se obtengan los coeficientes mediante un procedimiento (los autovalores de (a.IV.4), por ejemplo) que no convierta en una tautología la ecuación "a.IV.5".

<sup>72</sup> La ecuación (a.IV.10) no debiera sorprender porque la expresión "YX<sup>-1</sup>" se debe tan solo a dos cosas: a) que los valores de los productos finales los hemos definido en términos unitarios (por unidad de producto); b) que los precios son también unitarios.

<sup>73</sup> En un contexto marxiano serían composiciones orgánicas de capital a partir de los conceptos de capital constante y capital variable.

y de las ecuaciones (a.IV.11) y (a.IV.12) se elimina " $\mathbf{p}_a \mathbf{Y}_a$ " y se despeja los precios de los productos básicos y queda la ecuación matricial:

$$(a.IV.13) \quad \mathbf{p}_b = \left[ \mathbf{z}_a \Lambda_a - (1 + R_a) \mathbf{p}_a X + \mathbf{z}_b \Lambda_b \right] \times \mathbf{Y}_b^T \times \left[ \mathbf{Y}_b \mathbf{Y}_b^T \right]^{-1}$$

que desplegada como un sistema de ecuaciones queda:

$$p_{bk} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_{ai} \Lambda_{aij} \varphi_{jk} - (1 + R_a) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ai} X_{ij} \varphi_{jk} + \sum_{i=n+1}^m \sum_{j=1}^n z_{bi} \Lambda_{bij} \varphi_{jk}$$

para  $k = 1$  a  $k = m - n$

siendo " $\varphi_{jk}$ " el elemento fila  $j$  y columna  $k$  de la matriz  $\mathbf{Y}_b^T \times \left[ \mathbf{Y}_b \mathbf{Y}_b^T \right]^{-1}$

De las ecuaciones anteriores se pueden extraer algunas conclusiones:

a) los precios de los productos no básicos " $\mathbf{p}_b$ " disminuyen si aumenta la razón-patrón de los productos básicos, razón-patrón que es una medida de la capacidad de la tecnología para crear excedente.

b) los precios de los productos no básicos " $\mathbf{p}_b$ " *no pueden ser*, salvo excepciones, iguales (ni siquiera proporcionales) a los valores-trabajo, aún cuando lo fueran los precios de los productos básicos.

c) para que los precios fueran proporcionales a los valores-trabajo (no iguales) debiera cumplirse dos condiciones: que los multiplicadores de los productos no básicos fueran iguales ( $\mathbf{z}_c = \mathbf{z}_{b1} = \dots = \mathbf{z}_{b(m-n)}$ ) y que se cumpliera que:

$$(a.IV.14) \quad \left[ \mathbf{z}_a \Lambda_a - (1 + R_a) \mathbf{p}_a X \right] \times \mathbf{Y}_b^T \times \left[ \mathbf{Y}_b \mathbf{Y}_b^T \right]^{-1} = 0$$

lo que implicaría que los precios de los productos básicos fueran:

$$(a.IV.15) \quad \mathbf{z}_a \Lambda_a \mathbf{Y}_b^T = (1 + R_a) \mathbf{p}_a X \mathbf{Y}_b^T$$

y los precios de los no básicos quedarían:

$$(a.IV.16) \quad \mathbf{p}_b = \left[ \mathbf{z}_b \Lambda_b \right] \times \mathbf{Y}_b^T \times \left[ \mathbf{Y}_b \mathbf{Y}_b^T \right]^{-1}$$

d) En *la producción conjunta* con distinción de productos básicos y no básicos, *los precios* de estos últimos *no pueden ser proporcionales a los valores-trabajo* incluso con razón-patrón cero y con multiplicadores de los productos básicos (" $\mathbf{z}_a$ ") iguales. En efecto, según la última ecuación matricial, para que los precios fueran proporcionales a sus valores, la matriz  $\left[ \mathbf{Y}_b \mathbf{Y}_b^T \right]^{-1}$  debiera ser una matriz unitaria. Ello permitiría que (a.IV.16) quedara como:

$$(a.IV.17) \quad \mathbf{p}_b = \left[ \mathbf{z}_b \Lambda_b \right] \times \mathbf{Y}_b^T$$

Pero esto sólo puede ocurrir por casualidad -aún cuando los multiplicadores “ $z_b$ ” fueran todos iguales- por la presencia de la matriz no cuadrada (en general) “ $Y_b^T$ ”. Cosa distinta es si “ $Y_b^T$ ” fuera cuadrada -que el número de productos no básicos fuera el mismo que el de básicos-, porque entonces la ecuación de precios de los no básicos quedaría:

$$(a.IV.18) \quad p_b = [z_b \Lambda_b] \times Y_b^T \times [Y_b Y_b^T]^{-1} = [z_b \Lambda_b] \times Y_b^T \times [Y_b^T]^{-1} \times Y_b^{-1}$$

$$p_b = z_b \Lambda_b Y_b^{-1} \Rightarrow p_b Y_b = z_b \Lambda_b$$

y los precios serían proporcionales a los valores si los multiplicadores “ $z_b$ ” fueran iguales. Con ello volvemos al problema que ya hemos visto (nota 60) sobre el número de bienes básicos y no básicos (pág. 76 del libro de Sraffa) y su propuesta de “eliminar completamente, mediante transformaciones lineales, las mercancías no básicas del sistema, tanto del lado de los medios de producción como del lado de los productos”. Y habría que añadir que, de tal forma, que el número de productos no básicos fuera igual al de los básicos.

Todo ello encierra la misma lógica que la razón-patrón: si los precios de los productos (básicos) que entran en la producción de sus propias empresas (autoabastecimiento) entraran por sus valores, o si se vendieran sin beneficio alguna a otras empresas, éstas comprarían por sus valores; si estas últimas a su vez no aplicarían beneficios (producción de subsistencia, razón-patrón cero) en la venta de sus bienes y servicios, los precios serían proporcionales a sus valores-trabajo si no mediaran las leyes de la oferta y la demanda. Marx reconocía el papel del mercado, pero reivindicaba la importancia de su análisis precisamente porque suponía que los precios de mercado gravitarían en todo caso en torno a los valores-trabajo<sup>74</sup>. Luego vino el marginalismo y acabó con todo esto y con la posibilidad de construir una teoría económica con marchamo de ciencia.

Las consideraciones que hemos hecho aquí sobre el llamado problema de *la transformación de valores a precios* se apartan de las tradicionales que parten de las composiciones orgánicas de capital y el cálculo de las tasas de plusvalía y de ganancias surgidas de aquellas. Partir del supuesto de la igualación de las composiciones orgánicas carece de realismo. Como ha podido comprobarse, Sraffa no siguió ese camino y se centró en la diferenciación entre productos básicos y no básicos, la razón-patrón y la reducción del capital a trabajo fechado. No obstante, hemos visto en el epígrafe “5” y en este que tasas de explotación, composiciones orgánicas de capital y razón-patrón están unidas (**5.8**); también que con asignaciones convenientes (**a.IV.3** y **a.IV.4**), aunque discutibles, entre estas categorías marxianas y sraffianas se obtienen directamente las relaciones buscadas

<sup>74</sup> Sabemos que Marx no andaba exento de conocimientos matemáticos, pero desconozco si conocía el álgebra de matrices, autovalores, polinomios característicos, etc. En todo caso, lo que no pudo conocer, por motivos obvios, eran los trabajos de Markov y los teoremas de Perron y Frobenius.

entre precios y valores (**a.IV.5**). El inconveniente del análisis sraffiano en la producción conjunta surge al no considerar que el número de bienes básicos sea igual al de los no básicos, del cual Sraffa era perfectamente consciente (cap. **IV**, págs. **76** y siguientes del libro de "Producción...").

## Bibliografía mencionada:

Fiorito, Alejandro; "La implosión de la economía neoclásica", en [www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf](http://www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf)

Schumpeter, J. A.; "Historia del Análisis Económico" (*History of Economic Analysis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Sraffa, Piero; "Producción de mercancías por medio de mercancías" (*Production of commodities by means commodities*, 1960), 1975; "On the relations between cost and quantity produced"; "The laws returns under competitive conditions".

Ricardo, D.; "Principios de Economía Política y Tributación" (*On the Principles of Political Economy and Taxation*, 1950), 1973, F.C.E.

Vegara, J. M.; "Economía política y modelos multisectoriales", pág. 21, 1979, edit. Tecnos.

Segura, J.; "Análisis microeconómico", pág. 88, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Robinson, J.; "Ensayos críticos", 1984, Ediciones Orbis.

Estrin, S. y Laidler, D; "Introduction microeconomics".

Sargent, T.J.; "Teoría macroeconómica" (*Macroeconomic Theory*, 1979), 1988, Antoni Bosch editor.

Meade, J.; "A neo Classical Theory of Economic Growth".

Dobb, M.; "Teoría del valor y de la distribución desde Adam Smith, pág. 272, edit. Siglo Veintiuno editores.

Morhisima, M.; "La teoría económica de Marx" (*Marx's Economics*, 1973), 1977, pág. 15, edit. Tecnos.

Okhisio, N.; "A mathematical note on marxian theorems".

Heahfield, D. F.; "Productions funtions".

Afriat, S.; "Sraffa's Prices", Università degli Studi di Siena, quaderni 474, [www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf](http://www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf)

Moseley, F.: "El método lógico y el problema de la transformación", <http://www.azc.uam.mx/publicaciones/etp/num7/a8.htm>

Pasinetti, L.: "Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth", 1961/2.

Caballero, A. y Lluch, E. (1986); "Sraffa en España", Investigaciones Económicas (2ª época, vol. X, n.º 2)

Steedman, I.; "Marx, Sraffa y el problema de la transformación" (*Marx after Sraffa*), 1985, F.C.E.

Harcourt, G.C.; "Teoría del capital" (*Some Cambridge controversies in the theory of capital*), apéndice al cap. 4, 1975, edit. Oikos-tau.

Potier, J.P.; "Piero Sraffa", 1994, edicions Alfons Magnànim.

Ahijado, M.; "Distribución, precios de producción y crecimiento", 1982, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces.

Pasinetti, L.: "Structural Change and Economic Growth: a theoretical essay on the dynamics of Wealth of Nations", 1981, Cambridge University Press.